

Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2017-18.

Sesto compito a casa.

**Esercizio 1 .** Piano proiettivo  $P^2(\mathbb{R})$  con coordinate omogenee  $x_0, x_1, x_2$ . Consideriamo le due rette  $r : x_0 + x_1 = 0$  e  $r' : x_0 - x_2 = 0$ . Siano  $\lambda, \mu$  coordinate omogenee di  $r$  nel sistema di riferimento che ha i punti  $[0, 0, 1]$  e  $[1, -1, 0]$  come punti fondamentali e  $[1, -1, 2]$  come punto unità. Siano  $\lambda', \mu'$  coordinate omogenee di  $r'$  nel sistema di riferimento che ha i punti  $[0, 1, 0]$  e  $[1, 0, 1]$  come punti fondamentali e  $[2, 3, 2]$  come punto unità. Fissiamo il punto  $P_0 = [1, 0, 0]$ , che è esterno sia ad  $r$  che a  $r'$ , e consideriamo l'applicazione

$$\pi_{P_0} : r \rightarrow r'$$

che associa a  $P \in r$  il punto  $P' = L(P_0, P) \cap r'$ . Scrivere l'espressione di  $\pi_{P_0}$  nelle coordinate  $[\lambda, \mu]$  e  $[\lambda', \mu']$  verificando in particolare che trattasi di un isomorfismo di rette proiettive.

**Esercizio 2.** Spazio euclideo  $E^3$  con coordinate cartesiane  $x, y, z$ . Si consideri il luogo  $\mathcal{Q}$  dei punti di  $E^3$  le cui coordinate soddisfano

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

1. Verificare che  $\mathcal{Q}$  è una sfera <sup>1</sup> determinandone il centro e il raggio.

**Suggerimento:** quale è l'equazione della sfera di centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e raggio  $R$ ?

2. Verificare che il piano  $\pi$  di equazione

$$x + y - z = 3$$

è secante  $\mathcal{Q}$ ,  $\pi \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ , e determinare centro e raggio della circonferenza  $\mathcal{C}$  ottenuta intersecando  $\mathcal{Q}$  con  $\pi$ .

---

<sup>1</sup>con ciò si intende una *superficie sferica*