Geometria I. a.a. 2017-2018. (Prof. P. Piazza)
Compito a casa n. 4
Esercizi di geometria affine ed euclidea

Esercizio 1. Sia A uno spazio affine su V e sia $C \in A$ un suo punto. Se $P \in A$, allora il suo simmetrico rispetto a C è il punto $\sigma_C(P)$ definito dalla relazione

$$\overrightarrow{C\sigma_C(P)} = -\overrightarrow{CP}\,.$$

Fate una figura.
(i) Verificare che $P \to \sigma_C(P)$ definisce un'affinità, determinando in particolare l'isomorfismo associato $\phi \in GL(V)$.
(ii) Determinare l'espressione in coordinate di σ_C in $A^n(\mathbb{K})$ se C ha coordinate $(c_1, \ldots, c_n)$.

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio affine numerico $A^4(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato e sia S il sottospazio affine di equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 2 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 1\,.$$

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ uguale a $\mathrm{Span}((1,0,-1,0),(2,0,0,2))$.
1. Spiegare perché è ben definito l'operatore di proiezione su S parallelamente a U, $P_{S,U}$ (vedere Sernesi *Geometria 1*, p. 111).
2. Sia $\underline{t}$ un punto generico di $A^4(\mathbb{R})$. Determinare $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$ tali che

$$P_{S,U}(\underline{t}) = A\underline{t} + \underline{c}$$

3. Vero o falso: $P_{S,U}$ è un'affinità.

Esercizio 3. Spazio euclideo numerico E^4 con coordinate standard. Sia S l'iperpiano di equazione

$$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 + 5 = 0$$

e sia W_S la sua giacitura. Sia $\Pi_S : E^4 \to E^4$ la proiezione ortogonale su S; per definizione Π_S è la proiezione $p_{S,U}$ con $U = (W_S)^{\perp}$ [1].
Sia $\rho_S : E^4 \to E^4$ la simmetria ortogonale rispetto a S (anche detta *riflessione rispetto a* S); per definizione il valore di ρ_S su $\underline{t} \in E^4$, $\rho_S(\underline{t})$, è il punto che soddisfa

$$-\overrightarrow{\Pi_S(\underline{t})\underline{t}} = \overrightarrow{\Pi_S(\underline{t})\rho_S(\underline{t})}.$$

Fate una figura.
Determinare $A, B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $\underline{c}$, $\underline{d}$ in $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\Pi_S(\underline{t}) = A\,\underline{t} + \underline{c}\,, \quad \rho_S(\underline{t}) = B\,\underline{t} + \underline{d}\,.$$

Vero o falso: ρ_S *è un'isometria*. Spiegare....Per ulteriori informazioni su ρ_S vi invito a consultare Sernesi *Geometria 1*, pp 271 e 272.

Esercizi di geometria proiettiva

Esercizio 4.
Risolvere gli esercizi 1 a), 2 a) , 3 a) ,4 a), 5 del §25 in Sernesi Geometria 1 (p. 330).

[1] Quindi Π_S è la proiezione su S parallelamente a $(W_S)^{\perp}$.

Esercizio 5.
Risolvere l'esercizio 2 a), b) e c) del §26 in Sernesi Geometria 1 (p. 337).

Esercizio 6.
Risolvere l'esercizio 1 a) del §27 nel libro di Sernesi Geometria 1 (p. 353)

Esercizio 7
Risolvere l'esercizio 3 del §27 nel libro di Sernesi Geometria 1 (p. 353)
Suggerimento. Fate una figura e ispiratevi alla Proposizione 27.4 e ad un esercizio risolto in dettaglio a lezione.

Esercizio 8
Risolvere l'esercizio 4 del §27 nel libro di Sernesi (p. 353).
Suggerimento. Collegare i punti fissi di una proiettività con gli autovettori dell'automorfismo lineare associato.

Esercizio 9
Retta proiettiva $P^1(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee (X_0, X_1). Sono date le seguenti quaterne di punti:

$P_1 = [1,1]$, $P_2 = [2,0]$, $P_3 = [1,-1]$, $P_4 = [4,2]$.
$Q_1 = [1,-1]$, $Q_2 = [1,1]$, $Q_3 = [1,0]$, $Q_4 = [-2,6]$.
$S_1 = [1,2]$, $S_2 = [1,-1]$, $S_3 = [2,0]$, $S_4 = [1,3]$.

Stabilire se esistono due quaterne che sono proiettivamente equivalenti.