Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2017-18.

Compito del 15 Marzo 2018 (terzo compito)

Esercizio 1. $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata e prodotto scalare canonico. Sia W la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare i vettori di W che hanno lunghezza uguale a 2.

Esercizio 2. $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata e prodotto scalare canonico. Consideriamo il piano σ di equazione cartesiana

$$x + 2y - z = 0$$

(i) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0) \qquad \underline{f}_2 = (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

costituiscono una base *ortonormale* di σ.

(ii) Decomporre il vettore $\underline{u} = (0, 1, 2)$ del piano σ nella somma $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$ con $\underline{u}_1 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_1)$ e $\underline{u}_2 \in \mathrm{Span}(\underline{f}_2)$.

Esercizio 3. Dimostrare che $A \in O(2)$ se e solo se $A = R_\phi$ oppure $A = S_\phi$ con

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad S_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

Suggerimento: imporre che $A^T A = I_2$ e utilizzare le formule trigonometriche

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$$

Esercizio 4. Vi ricordo che se $(V, <\,,\,>)$ è uno spazio vettoriale euclideo e U è un sottospazio allora

$$V = U \oplus U^\perp .$$

(i) Sia $\underline{v} \in V$ e sia $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}^\perp$ la sua decomposizione secondo $V = U \oplus U^\perp$. Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \to \underline{u} \in V$$

definisce un operatore **lineare** $P_U : V \to V$, detto *proiezione ortogonale su* U.

(ii) Verificare che il nucleo di P_U è $U^\perp$ e che l'immagine di P_U è U; verificare infine che P_U è sempre diagonalizzabile.

(iii) Sia $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k\}$ una base ortonormale di U; come possiamo esprimere $P_U(\underline{v})$?

(iv) Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico. Sia σ il piano generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$ e $\underline{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$. Sia P_σ l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a P_σ nella base canonica.

(v) È anche definito $P_{U^\perp}$. Verificare che in $\mathrm{End}(V)$ sussistono le seguenti identità

$$P_U + P_{U^\perp} = \mathrm{Id}_V , \quad (P_U)^2 = P_U , \quad (P_{U^\perp})^2 = P_{U^\perp}$$

dove $T^2 := T \circ T$ per un operatore $T \in \mathrm{End}(V)$.

Esercizio 5. **(Facoltativo)** Sia $(G, \bullet)$ un gruppo. Dimostrare che l'elemento neutro è unico. Dimostrare che l'inverso di $g \in G$ è unico.

Esercizio 6. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $GL(n, \mathbb{R})$:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$
$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$$
$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}.$$

Verificare che sono sottogruppi di $GL(n, \mathbb{R})$.

Esercizio 7. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$ e consideriamo il prodotto scalare

$$< P, Q > := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Abbiamo considerato questo prodotto scalare nel Compito a casa n. 2. Consideriamo il vettore $1 - X$ e la retta $\mathbb{R}(1 - X)$. Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio $(\mathbb{R}(1 - X))^{\perp}$.