Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2017-18.

Compito del 1 Marzo 2018 (secondo compito)

Esercizio 1. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base standard (o canonica) $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata. Coordinate associate (x_1, x_2, x_3, x_4).
Sia $b(\, , \,)$ la forma bilineare definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3$$

(i). Scrivere la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$, $A_b^{\mathcal{E}}$.

(ii). Stabilire se b è simmetrica.

(iii). Verificare che b ha rango 4.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale reale. Una forma bilineare simmetrica b è *definita positiva* se $b(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$. Una matrice simmetrica $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è definita positiva se la forma bilineare simmetrica $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da $b_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T A \underline{y}$ è definita positiva.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Fissiamo la base standard $\mathcal{E} = \{1, X, X^2\}$.
2.1 Verificare che l'applicazione $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$b(P, Q) := \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

definisce una forma bilineare simmetrica definita positiva.
2.2 Determinare la matrice associata a b nella base $\mathcal{E}$: $A_b^{\mathcal{E}}$.

Esercizio 3. Sia V di dimensione n. Utilizzando l'espressione in coordinate di una forma bilineare $b : V \times V \to \mathbb{K}$ date una dimostrazione della seguente proposizione: *$rg(b) = n$ se e solo se $\forall \underline{v} \neq \underline{0}$ $\exists \underline{w}$ tale che $b(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$.*