Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Quindicesimo compito (per il pomeriggio del 1/6/2017))

Esercizio 1. Determinare le rette di $P^2(\mathbb{C})$ passanti per il punto $[1,0,1]$ e tangenti alla conica di equazione

$$X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 = 0$$

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C}$ in $A^2(\mathbb{C})$ una conica a centro e sia C il suo centro. Verificare che la polare del centro, $\Gamma^1_C(\mathcal{C})$, è la retta impropria.
Suggerimento. Le coordinate del centro sono (unica) soluzione di un sistema lineare non-omogeneo; quale ?

Esercizio 2. Determinare la conica di $A^2(\mathbb{C})$ che sia tangente alla retta τ di equazione $X - Y = 0$ nell'origine $O(0,0)$ e passi per i punti $A(1,0)$, $B(2,1)$ e $P(-1,1)$.
Suggerimento. Potete imporre le $2+3=5$ condizioni date nel testo dell'esercizio all'equazione della conica generica e risolvere il conseguente sistema. Oppure procedete come segue.
Consideriamo la coppia di rette τ, $r(A,B)$ e la coppia di rette $r(O,A)$, $r(O,B)$; fate una figura. Consideriamo le coniche $\mathcal{C} := \tau \cup r(A,B)$ e $\mathcal{D} := r(O,A) \cup r(O,B)$.
Sia $\{\mathcal{E}_{(\lambda,\mu)}\}$ il fascio di coniche individuato da $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Si può dimostrare che ogni $\mathcal{E}_{(\lambda,\mu)}$ è tangente a τ in O [1]. Assumendo quest'ultima proprietà completare l'esercizio determinando esplicitamente l'equazione della conica richiesta.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica affine in $A^2(\mathbb{C})$ di equazione $f(X,Y) = 0$. Verificare che un punto semplice $P \in \mathcal{C}$ è un flesso se e solo se

$$\det \begin{vmatrix} f_{XX}(P) & f_{XY}(P) & f_X(P) \\ f_{XY}(P) & f_{YY}(P) & f_Y(P) \\ f_X(P) & f_Y(P) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Suggerimento. Dovete imporre che la retta tangente in P abbia molteplicità d'intersezione almeno 3 con la curva nel punto P.
(Se nell'equazione precedente sostituiamo a P le variabili (X,Y) allora otteniamo l'equazione *affine* dell'Hessiana $\mathcal{H}$.)

Esercizio 5. Sia $\mathcal{C}$ la cubica di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione affine $X^3 - X^2 + Y^2 = 0$. Verificare che l'unico punto improprio di $\mathcal{C}$ è un flesso. Verificare che esistono altri due flessi al finito e determinarne le coordinate. (Utilizzare l'esercizio precedente per questa seconda parte....)

Ulteriori esercizi di preparazione alla prova scritta.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$f(X;Y) = Y^2(X - 2Y) - (X^2 + Y^2) = 0\,.$$

1. Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ e gli eventuali asintoti.
2. Verificare che l'origine è un punto singolare; determinarne le tangenti principali. *Soluzione dettagliata in Sernesi.*

[1] più precisamente, la retta τ è una componente di $\mathcal{E}_{(\lambda,0)} = \mathcal{D}$ e $I(\mathcal{E}_{(\lambda,\mu)}, \tau; O) = 2\ \forall \mu \neq 0$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C}$ la cubica di $P^2(\mathbb{C})$ di equazione $X_1^3 + X_0X_1^2 - X_0X_2^2 = 0$.
1. Calcolare la prima polare di $\mathcal{C}$ rispetto a $P[0,0,1]$ e verificare che $\mathcal{C} \cap \Gamma_P^1(\mathcal{C})$ è costituito da tre punti Q_1, Q_2, Q_3.
2. Determinare le tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da $P[0,0,1]$.

Esercizio 3. Nello spazio proiettivo $P^3(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2, x_3 è data la quadrica Q di equazione

$$-X_0^2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_2X_3 = 0$$

1. Determinare la forma canonica proiettiva della quadrica.
2. Sia Q_0 la quadrica affine di $P^3(\mathbb{R}) \setminus H_0$ ottenuta a partire da Q per deomogeneizzazione. Classificare Q_0.

Esercizio 4. Verificare che in un fascio di coniche non tutte degeneri esistono precisamente tre coniche degeneri.