**Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.**

**Quattordicesimo compito (per il fine settimana del 27-28 Maggio))**

**Esercizio 1.** Sia $\mathbf{A}$ un piano affine reale e siano $A, B, C$ tre suoi punti non allineati. Il triangolo di vertici $A, B, C$ è l'insieme dei punti $P$ di $\mathbf{A}$ tali che

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}$$

per qualche $u, t \in \mathbb{R}$ tali che $u, t \geq 0$ e $u + t \leq 1$.

**1.** Verificare che un triangolo è un insieme convesso[1].
**2.** Verificare che il triangolo di vertici $A, B, C$ è l'inviluppo convesso dell'insieme $\{A, B, C\}$ [2].

**Esercizio 2 .** Piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $x_0, x_1, x_2$. Consideriamo le due rette $r : x_0 + x_1 = 0$ e $r' : x_0 - x_2 = 0$. Siano $\lambda, \mu$ coordinate omogenee di $r$ nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 0, 1]$ e $[1, -1, 0]$ come punti fondamentali e $[1, -1, 2]$ come punto unità. Siano $\lambda', \mu'$ coordinate omogenee di $r'$ nel sistema di riferimento che ha i punti $[0, 1, 0]$ e $[1, 0, 1]$ come punti fondamentali e $[2, 3, 2]$ come punto unità. Fissiamo il punto $P_0 = [1, 0, 0]$, che è esterno sia ad $r$ che a $r'$, e consideriamo l'applicazione

$$\pi_{P_0} : r \to r'$$

che associa a $P \in r$ il punto $P' = L(P_0, P) \cap r'$. Scrivere l'espressione di $\pi_{P_0}$ nelle coordinate $[\lambda, \mu]$ e $[\lambda', \mu']$ verificando in particolare che trattasi di un isomorfismo di rette proiettive.

**Esercizio 3.** Spazio euclideo $E^3$ con coordinate cartesiane $x, y, z$. Si consideri il luogo $\mathcal{Q}$ dei punti di $E^3$ le cui coordinate soddisfano

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 5 = 0.$$

**1.** Verificare che $\mathcal{Q}$ è una sfera [3] determinandone il centro e il raggio.
**Suggerimento:** quale è l'equazione della sfera di centro $(x_0, y_0, z_0)$ e raggio $R$?
**2.** Verificare che il piano $\pi$ di equazione

$$x + y - z = 3$$

è secante $\mathcal{Q}$, $\pi \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, e determinare centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando $\mathcal{Q}$ con $\pi$.

**Esercizio 4.** Consideriamo la curva algebrica

$$\mathcal{C} : f(X; Y) = (X - Y)^3 + X^2 - Y^2 - 4X = 0$$

in $A^2(\mathbb{C})$.

- Verificare che l'origine è un punto semplice e determinarne la tangente.

[1] $F$ è convesso se comunque presi due suoi punti il segmento che li unisce è tutto contenuto in $F$

[2] l'inviluppo convesso di un insieme è l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono quell'insieme

[3] con ciò si intende una *superficie sferica*

- Verificare che esiste un solo punto improprio $P_\infty$.
- Studiare la natura del punto improprio $P_\infty$ stabilendo in particolare che esso è multiplo per $\mathcal{C}^*$, la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.
- Determinare le tangenti principali a $\mathcal{C}^*$ in $P_\infty$.
  *Possibile suggerimento:* le tangenti principali vanno cercate nel fascio di rette proiettive per $P_\infty$. Per fissare le idee supponiamo che $P_\infty = [0, \ell, m]$. Le rette proiettive del fascio per $P_\infty$ sono costituite dalle chiusure proiettive delle rette affini con direzione data da $(\ell, m)$ e dalla retta impropria. La retta impropria va studiata a parte.
  Per le rette di direzione $(\ell, m)$, e cioè per il fascio improprio di rette parallele di direzione $(\ell, m)$, cercare quali fra esse ”hanno meno intersezioni al finito” di quante ne dovrebbero avere; quelle devono fornire le tangenti principali.

**Esercizio 5. (Ripasso di Algebra Lineare).** Sia $(V, < \, , \, >)$ uno spazio vettoriale euclideo. Sia $T \in O(V)$. Dimostrare che $T$ è diagonalizzabile se e solo se $T$ è simmetrico.