Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Tredicesimo compito (esercitazione pomeridiana del 25/5)

Esercizio 1. In $A^2(\mathbb{C})$ è data la curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $f(X,Y) = 0$, con

$$f(X,Y) = X^4 - X^2Y^2 + Y^3$$

$\mathcal{C}$ è una quartica.

- calcolare tutte le derivate parziali di f
- determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e la loro natura (doppio, triplo o quadruplo)
- in ognuno di questi punti si scrivano le equazioni cartesiane delle tangenti principali
- determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$ (equivalentemente, determinate l'intersezione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ con la retta impropria $X_0 = 0$) e stabilire se sono punti semplici o multipli per la sua chiusura proiettiva
- verificare che $\mathcal{C}$ ammette 2 asintoti e determinarne l'equazione cartesiana [1].

Esercizio 2. Siano $\mathcal{C}$ una curva riducibile: $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ con $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{E}$ irriducibili. Dimostrare che se P è un punto nell'intersezione di $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{E}$ allora P è necessariamente un punto singolare per $\mathcal{C}$.
Suggerimento. Come si calcola la derivata di un prodotto ?

Esercizio 3. Piano proiettivo reale numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. È data la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione

$$3X_0^2 - 10X_0X_2 + 2X_1^2 + 3X_2^2 = 0$$

1. Determinare la forma canonica proiettiva della conica $\mathcal{C}$.
2. Siano $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ le coniche affini ottenute disomogeinando rispetto a X_0, X_1, X_2 rispettivamente. Classificare dal punto di vista affine le tre coniche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Esercizio 4. Piano proiettivo $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Siano dati i punti $P_1 = [1,4,1]$, $P_2 = [0,1,1]$, $P_3 = [2,3,-3]$.
1. Dimostrare che i tre punti sono allineati e determinare le retta r che li contiene.
2. Consideriamo su r il sistema di riferimento di coordinate omogenee λ, μ in modo tale che i punti P_1, P_2, siano i punti fondamentali e P_3 il punto unità; determinare le coordinate λ, μ di un punto di r in funzione delle sue coordinate omogenee x_0, x_1, x_2.
3. Determinare le coordinate omogenee x_0, x_1, x_2 del punto $P \in r$ tale the il birapporto $\beta(P_1, P_2, P_3, P) = -4$.

[1] Vi ricordo che r è un asintoto per $\mathcal{C}$ se la chiusura proiettiva di r è una tangente principale per la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ in un suo punto improprio