Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Dodicesimo compito (19 Maggio 2017)

Esercizi sulle coniche

Esercizio 1.
Calcolare gli invarianti affini delle nove coniche canoniche affini reali

$$\mathrm{rg}(\mathcal{C})\,, \quad \mathrm{rg}(A_0) \quad \mathrm{segno}(\det A_0)\,, \quad |s|\,, \quad |s_0|$$

e verificare che essi le distinguono. Qui abbiamo denotato con $|s|$ la segnatura di A a meno dell'ordine e similmente per $|s_0|$; il segno del determinante di A_0 è per definizione 0 quando il rango di A_0 non è 2.
Create una tabella con le 9 coniche sulla riga superiore orizzontale e gli invariati affini nella colonna a sinistra.
Notate che Sernesi non usa $|s|$ e $|s_0|$ ma, invece, l'informazione sul supporto e più precisamente se esso è vuoto o non-vuoto (il supporto di una conica è ovviamente un invariate affine).

Esercizio 2.
Nel piano affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ classificare le seguenti coniche:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 : &\quad X_1^2 + 6X_1X_2 - 2X_2^2 + 2X_1 - 4X_2 + 2 = 0\\
\mathcal{C}_2 : &\quad X_1^2 + 2X_1X_2 + X_1^2 + 3X_1 + 3X_2 = 0\\
\mathcal{C}_3 : &\quad 2X_1^2 + 2X_1X_2 + 3X_2^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Leggere enunciato e dimostrazione del Teorema di classificazione delle coniche euclidee. (Teorema 31.3)

Esercizio 4.
Rifate da soli e completate l'esercizio svolto in classe:
E^2 associato a $(\mathbb{R}^2, <\,,\,>_{\text{canonico}})$; riferimento cartesiano canonico fissato con coordinate (x, y). Sia $\mathcal{C}$ la conica di E^2 di equazione:

$$5X^2 + 5Y^2 - 6XY + 16\sqrt{2}X + 38 = 0.$$

- Determinare una conica euclidea canonica $\mathcal{D}$ ed una isometria $\psi : E^2 \to E^2$ tale che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$.
- Fate un disegno.
- Determinate un riferimento cartesiano $O'\underline{i}'\underline{j}'$ con la proprietà che $\mathcal{C}$ abbia equazione canonica metrica nel nuovo riferimento.
- Fate un disegno.

Esercizio 5.
Testo come per l'Esercizio 4 ma per la conica di equazione

$$X^2 + 2XY + Y^2 + 2X - 2Y = 0$$

Esercizi di ripasso di algebra lineare e geometria affine

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}^{2n}$ e sia b una forma bilineare simmetrica non degenere con indice di positività ed indice di negatività uguali. Notare che il radicale di b è quindi costituito dal vettore nullo.
1. Si determini un sottospazio $W \subset V$ di dimensione n tale che la forma b ristretta a W sia identicamente nulla, cioè $b(\underline{u}, \underline{v}) = 0$ per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in W$.
2. Il sottospazio W del punto precedente è unico?
Suggerimento Cominciate dal caso $n = 1$.

Esercizio 7. Sia A uno spazio affine su V, S un sottospazio affine di giacitura W ed U un sottospazio vettoriale supplementare di W: $W \oplus U = V$. Dare la definizione dell'applicazione $\Sigma_{S,U}$ di simmetria rispetto a S parallelamente a U. (Fate una figura: se siete bloccati consultate Sernesi 20.10, complemento 4 per ispirazione).
Descrivere in coordinate questa applicazione nel caso in cui $A = A^4(\mathbb{R})$, S ha equazioni cartesiane

$$X_1 + X_2 - X_3 = 2 \qquad X_2 + X_3 - X_4 = 1\,.$$

ed U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ uguale a $\mathrm{Span}((1,0,-1,0),(2,0,0,2))$. ($S$ ed U sono stati già considerati nel Compito 9, Esercizio 4.)
Vero o Falso: $\Sigma_{S,U} \in \mathrm{Aff}(A)$.
Se ora V è uno spazio vettoriale euclideo e $U = W^{\perp}$ cosa possiamo dire dell'applicazione $\Sigma_{S,U}$?