Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito (facoltativo) del 4 Maggio 2017
(intorno all'operazione di prodotto vettoriale)

Sia $V = \mathcal{V}_O$. Sappiamo che V è uno spazio vettoriale euclideo; lo orientiamo tramite una scelta di base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate. Sappiamo che è definita in V un'operazione di prodotto vettoriale $\wedge : V \times V \to V$.

Esercizio 1. Verificare che vale

$$\underline{w} \wedge (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{w} \wedge \underline{v}_1 + \underline{w} \wedge \underline{v}_2 \,.$$

Suggerimento. Dalla proprietà $(\lambda\underline{v}) \wedge \underline{w} = \lambda(\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{v} \wedge (\lambda\underline{w})$, che è di immediata verifica, capiamo che possiamo supporre che $\underline{w}$ sia unitario. Utilizzare una decomposizione $\underline{v}_j = \alpha\underline{w} + \underline{v}'_j$ con $\alpha > 0$ e $\underline{v}'_j \perp \underline{w}$.

Esercizio 2. Sia $\underline{a} = a_1\underline{i}+a_2\underline{j}+a_3\underline{k}$ un fissato vettore di V. Si consideri l'applicazione $T_{\underline{a}} : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{a} \wedge \underline{v}$: $T_{\underline{a}}(\underline{v}) = \underline{a} \wedge \underline{v}$.

(2.1) Verificare che $T_{\underline{a}}$ è lineare.

(2.2) Scrivere la matrice associata a $T_{\underline{a}}$ nella base ortonormale fissata. Questa matrice dipende dalle cordinate di $\underline{a}$. La denotiamo $A_{T_{\underline{a}}}$

(2.3) Determinare il nucleo di $T_{\underline{a}}$ e *la dimensione* dell'immagine di $T_{\underline{a}}$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

definita da

$$\underline{a} \longrightarrow A_{T_{\underline{a}}}$$

con $A_{T_{\underline{a}}}$ la matrice di cui in (2.2). Verificare che F è un'applicazione lineare. Trovare il nucleo di F. Descrivere l'immagine di F. Dare una formula che leghi $F(\underline{a} \wedge \underline{b})$ ed il prodotto righe per colonne di $F(\underline{a})$ e di $F(\underline{b})$.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
Definizione. V è un'**algebra** se esiste una *moltiplicazione fra vettori*, la denotiamo con $\star$, che è distributiva:

$$(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) \star \underline{z} = \lambda(\underline{v} \star \underline{z}) + \mu(\underline{w} \star \underline{z})$$
$$\underline{z} \star (\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = \lambda(\underline{z} \star \underline{v}) + \mu(\underline{z} \star \underline{w}).$$

Denotiamo con $(V, \star)$ una tale algebra.

Un esempio di algebra è dato da $V = \mathrm{Hom}(W, W) \equiv \mathrm{End}(W)$, con W un qualsiasi spazio vettoriale. In questo caso la moltiplicazione $\star$ è per definizione uguale alla composizione di applicazioni: $T \star S := T \circ S$.
Un altro esempio è fornito da $V = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con prodotto uguale per definizione al prodotto righe per colonne.
In questi due esempi il prodotto fra vettori è associativo; in generale però l'associatività non fa parte della definizione di algebra. Ad esempio $\mathcal{V}_O$ con il prodotto dato dal prodotto vettoriale è un' algebra ma *non* è associativa.

Definizione. $(V, \star)$ è un'**algebra di Lie** [1] se valgono le seguenti due proprietà addizionali :

$$\underline{v} \star \underline{w} = -\underline{w} \star \underline{v}$$

$$(\underline{v} \star \underline{w}) \star \underline{z} + (\underline{w} \star \underline{z}) \star \underline{v} + (\underline{z} \star \underline{v}) \star \underline{w} = 0.$$

La prima è la proprietà di *anticommutazione*. La seconda è detta "identità di Jacobi". Le algebre di Lie giocano un ruolo fondamentale in Matematica e in Fisica.

Esercizio 4. Lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale V con il prodotto fra vettori definito dal prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie di dimensione 3.
Suggerimento. La proprietà distributiva e di anticommutazione sono note; per dimostrare l'identità di Jacobi si usa, ad esempio, la seguente identità:

$$(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = (< \underline{v}_1, \underline{v}_3 >)\underline{v}_2 - (< \underline{v}_2, \underline{v}_3 >)\underline{v}_1$$

Dimostrate quindi quest'ultima identità e poi utilizzatela per dimostrare l'identità di Jacobi.

Esercizio 5.
(5.1) Verificare che $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con il prodotto

$$A \star B := A \cdot B - B \cdot A$$

(con $\cdot$ = prodotto righe per colonne) è un'algebra di Lie di dimensione 9.
(5.2) Verificare che $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | A = -A^T\}$ con lo stesso prodotto è un'algebra di Lie di dimensione 3.

Definizione: Un omomorfismo fra due algebre $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ è un'applicazione *lineare* $S : V \longrightarrow W$ che rispetta il prodotto: $S(\underline{a} \star \underline{b}) = S(\underline{a}) \odot S(\underline{b})$. S è un isomorfismo di algebre se inoltre S è biunivoco (iniettivo e suriettivo). Se $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ sono algebre di Lie ed S è una biezione lineare che rispetta il prodotto allora si dice che S è un *isomorfismo di algebre di Lie.*

Esercizio 6. Mettendo insieme gli esercizi 2, 3, 4 e 5 scrivete una dimostrazione per il seguente

Teorema. Sia $V = \mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale euclideo con una fissata orientazione. Sia $(V, \wedge)$ l'algebra di Lie definita considerando come prodotto fra vettori il prodotto vettoriale $\wedge$. Sia $(\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \star)$ l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche con prodotto $\star$ definito da $A \star B = A \cdot B - B \cdot A$. Esiste un isomorfismo di algebre di Lie

$$F : (V, \wedge) \to (\mathcal{A}_{3\times 3}, \star)$$

Suggerimento: avete già un candidato per F...[2]

[1] leggi *li*

[2] Un bravo/brava a chi è arrivato in fondo: questo è un classico risultato, importante sia in Geometria che in Meccanica; lo trovate dato per esercizio, ad esempio, nel libro *Foundations of Mechanics* di R. Abraham e J. Marsden (ma io l'ho diluito in vari esercizi....).