Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Sketch delle soluzioni del compito (facoltativo) del 4 Maggio 2017

Sia $V = \mathcal{V}_O$. Sappiamo che V è uno spazio vettoriale euclideo; lo orientiamo tramite una scelta di base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate. Sappiamo che è definita in V un'operazione di prodotto vettoriale $\wedge : V \times V \to V$.

Esercizio 1. *Verificare che vale*

$$\underline{w} \wedge (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{w} \wedge \underline{v}_1 + \underline{w} \wedge \underline{v}_2 \,.$$

Soluzione esercizio 1. Vedere soluzione a parte.

Esercizio 2. *Sia* $\underline{a} = a^1\underline{i}+a^2\underline{j}+a^3\underline{k}$ *un fissato vettore di* V. *Si consideri l'applicazione* $T_{\underline{a}} : V \longrightarrow V$ *che associa a* $\underline{v}$ *il vettore* $\underline{a} \wedge \underline{v}$: $T_{\underline{a}}(\underline{v}) = \underline{a} \wedge \underline{v}$.
(2.1) Verificare che $T_{\underline{a}}$ *è lineare.*
(2.2) Scrivere la matrice associata a $T_{\underline{a}}$ *nella base ortonormale fissata. Questa matrice dipende dalle cordinate di* $\underline{a}$. *La denotiamo* $A_{T_{\underline{a}}}$
(2.3) Determinare il nucleo di $T_{\underline{a}}$ *e la dimensione dell'immagine di* $T_{\underline{a}}$.

Soluzione esercizio 2.
Sia $\mathcal{E}$ la base ortonormale fissata.
(2.1) La linearità di $T_{\underline{a}}$ segue dalle proprietà del prodotto vettoriale.
(2.2) Utilizzando le proprietà viste per il prodotto vettoriale otteniamo

$$T_{\underline{a}}(\underline{i}) = a^3\underline{j} - a^2\underline{k}\,; \quad T_{\underline{a}}(\underline{j}) = -a^3\underline{i} + a^1\underline{k}\,; \quad T_{\underline{a}}(\underline{k}) = a^2\underline{i} - a^1\underline{j}\,.$$

Ne segue che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(T_{\underline{a}}) = \begin{vmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{vmatrix}$$

(2.3) $N(T_{\underline{a}}) = \mathbb{R}\underline{a}$ perché $\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{0}$ se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{u}$ sono proporzionali. Quindi $\dim \mathrm{Im}T_{\underline{a}} = 2$ (a meno che $\underline{a} = \underline{0}$, nel qual caso $N(T_{\underline{a}}) = \mathbb{R}^3$ e $\mathrm{Im}T_{\underline{a}} = \{\underline{0}\}$).

Esercizio 3. *Si consideri l'applicazione*

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$$

definita da

$$\underline{a} \longrightarrow A_{T_{\underline{a}}}$$

con $A_{T_{\underline{a}}}$ *la matrice di cui in (2.2). Verificare che* F *è un'applicazione lineare. Trovare il nucleo di* F. *Descrivere l'immagine di* F. *Dare una formula che leghi* $F(\underline{a} \wedge \underline{b})$ *ed il prodotto righe per colonne di* $F(\underline{a})$ *e di* $F(\underline{b})$.

Soluzione esercizio 3.
Per definizione

$$F(\underline{a}) = \begin{vmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{vmatrix}$$

La linearità di F è immediata da questa formula. Sempre da questa formula si ha che $N(F) = \{\underline{0}\}$ e che l'immagine di F è costituita dal sottospazio delle matrici

antisimmetriche $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$.
Facendo i conti si scopre che

$$F(\underline{a} \wedge \underline{b}) = F(\underline{a}) \cdot F(\underline{b}) - F(\underline{b}) \cdot F(\underline{a})$$

con $\cdot$ il prodotto righe per colonne.

Esercizio 4. *Lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale V con il prodotto fra vettori definito dal prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie di dimensione 3.*
Suggerimento. La proprietà distributiva e di anticommutazione sono note; per dimostrare l'identità di Jacobi si usa, ad esempio, la seguente identità:

$$(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = (< \underline{v}_1, \underline{v}_3 >)\underline{v}_2 - (< \underline{v}_2, \underline{v}_3 >)\underline{v}_1$$

Dimostrate quindi quest'ultima identità e poi utilizzatela per dimostrare l'identità di Jacobi.

Soluzione esercizio 4. Tutto piuttosto facile: la formula data nel *Suggerimento* si verifica facendo i conti con la formula che dà il prodotto vettoriale in coordinate. Da questa si ottiene facilmente l'identità di Jacobi. Le altre proprietà per definire un'algebra di Lie sono immediate.

Esercizio 5.
(5.1) Verificare che $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *con il prodotto*

$$A \star B := A \cdot B - B \cdot A$$

(con $\cdot$ = prodotto righe per colonne) è un'algebra di Lie di dimensione 9.
(5.2) Verificare che $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | A = -A^T\}$ *con lo stesso prodotto è un'algebra di Lie di dimensione 3.*

Soluzione esercizio 5. Tutto molto semplice.
(5.1) è un semplice calcolo (tenete ovviamente conto delle proprietà del prodotto righe per colonne).
(5.2) è anche immediata una volta verificato che il prodotto $\star$ di due matrici antisimmetriche è ancora una matrice antisimmetrica.

Esercizio 6. *Mettendo insieme gli esercizi 2, 3, 4 e 5 scrivete una dimostrazione per il seguente*

Teorema. *Sia $V = \mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale euclideo con una fissata orientazione. Sia $(V, \wedge)$ l'algebra di Lie definita considerando come prodotto fra vettori il prodotto vettoriale $\wedge$. Sia $(\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \star)$ l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche con prodotto $\star$ definito da $A \star B = A \cdot B - B \cdot A$. Esiste un isomorfismo di algebre di Lie*

$$F : (V, \wedge) \to (\mathcal{A}_{3\times 3}, \star)$$

Soluzione esercizio 6. Sia $F : V \to \mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ l'applicazione dell'Esercizio 3. Abbiamo visto che F è lineare, iniettiva e suriettiva. Quindi F è un isomorfismo di spazi vettoriali. Dalla formula (11) segue che $F(\underline{a} \wedge \underline{b}) = F(\underline{a}) \star F(\underline{b})$; ma allora F è un isomorfismo di algebre di Lie. Il teorema è dimostrato.