Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2016-17.

Compito a casa del 3 Marzo 2017 (primo compito)

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $V^\vee$ lo spazio duale associato a V. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme di V; definiamo

$$S^\circ := \{L \in V^\vee \mid L(\underline{v}) = 0 \ \forall \underline{v} \in S\}\,.$$

$S^\circ \subset V^\vee$ è detto l'*annullatore* di $S \subset V$. Se R è un sottoinsieme di $V^\vee$ definiamo

$$^\circ R := \{\underline{v} \in V \mid L(\underline{v}) = 0 \mid \forall L \in R\}\,.$$

$^\circ R \subset V$ è detto l'*annullatore* di $R \subset V^\vee$.

Esercizio 1. Verificare che $S \subset T \Rightarrow T^\circ \subset S^\circ$.

Esercizio 2. Verificare che S° e $^\circ R$ sono sottospazi di $V^\vee$ e V rispettivamente. Determinare l'annullatore di V e del sottospazio banale $\{\underline{0}\}$.

Esercizio 3. Verificare che $S^\circ = (\mathrm{Span}(S))^\circ$ dove vi ricordo che $\mathrm{Span}(S)$ è il sottospazio generato da S, e cioè l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di S. Analogamente per $^\circ R$.

Esercizio 4. Siano W_1, W_2 due sottospazi di V. Verificare che

$$(W_1 + W_2)^\circ = (W_1)^\circ \cap (W_2)^\circ \quad \text{e che} \quad (W_1 \cap W_2)^\circ = (W_1)^\circ + (W_2)^\circ.$$

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}_n[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$. È ben noto che $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base di V.
Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.
Consideriamo $P \in V$ e riguardiamolo come una funzione infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$. Possiamo considerare la valutazione in t, $P(t)$, e, più in generale, $\frac{d^k P}{dx^k}(t)$.
Verificare che le applicazioni $V \to \mathbb{R}$ definite da

$$P \to P(t) \qquad \text{e} \qquad P \to \frac{d^k P}{dx^k}(t)$$

definiscono elementi di $V^\vee$.
Utilizzando questi funzionali per t opportuno determinare la base duale di $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$