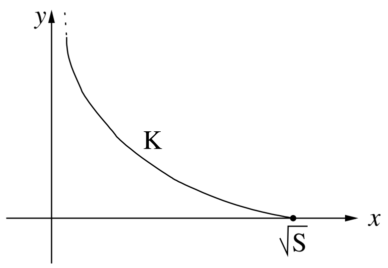


Figura 3.7: Insieme K, grafico di $\phi(x) = (S - x^2)/(4x)$, $x \in (0, \sqrt{S}]$.

quindi può essere parametrizzato da $\gamma(x) = (x, \phi(x))$, $x \in (0, \sqrt{S}]$. I valori che il volume $V(x, y)$ assume su K possono essere determinati studiando la funzione composta

$$h(x) = V(x, \phi(x)) = x^2 \, \frac{S - x^2}{4x} = \frac{x}{4} \, (S - x^2)$$

definita nell'intervallo $(0, \sqrt{S}]$. Abbiamo che

$$h'(x) = \frac{S - 3x^2}{4} \ ,$$

quindi h è crescente in $(0, \sqrt{S/3})$ ed è decrescente per $x > \sqrt{S/3}$. Ne segue che il punto $x_0 = \sqrt{S/3}$ è di massimo assoluto per h; per inciso, osserviamo che il punto $x = \sqrt{S}$, a cui corrisponde l'altezza $y = \phi(\sqrt{S}) = 0$, è invece il punto di minimo assoluto di h nell'intervallo $(0, \sqrt{S}]$. Di conseguenza, il punto

$$P = (x_0, \phi(x_0)) = \left(\sqrt{\frac{S}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}} \right)$$

è punto di massimo assoluto vincolato di V su K. Possiamo dunque concludere che il capanno ottimale deve avere come base il quadrato di lato $\sqrt{S/3}$ e come altezza $(\sqrt{S/3})/2$.

Supponiamo ora di voler determinare gli estremi assoluti di f in K quando K è composto da un aperto più una parte di frontiera che sia l'unione di un numero finito di curve regolari. Il problema di ottimizzazione in K tipicamente si suddivide in due problemi di ottimizzazione separati:

- il problema di ottimizzazione libera nei punti interni di K, per il quale si applicano le tecniche descritte nel Paragrafo 3.2;

- il problema di ottimizzazione vincolata sulla frontiera Γ di ∂K che si riduce al problema di ottimizzazione della restrizione di f a Γ.

Se K è chiuso e limitato, il Teorema 3.7 di Weierstrass garantisce l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluto di f in K. Di conseguenza, nelle ipotesi

$$\boxed{f\colon A \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \text{ nell'aperto } A \subset \mathbb{R}^2, \text{ e } K \subset A \text{ chiuso e limitato,}}$$

siamo sicuri che esistono i punti di massimo e minimo assoluto di f in K. Gli unici candidati sono tutti i punti stazionari interni a K e tutti i punti stazionari vincolati su Γ, ai quali si aggiungono i punti iniziali e finali delle curve regolari che compongono il vincolo (che d'ora in avanti chiameremo anche punti di non regolarità del vincolo). Qualsiasi altro punto di K non può essere un punto di estremo assoluto di f in K.

Supponiamo per semplicità di avere così selezionato solo un numero finito di punti, che indicheremo con $P_1, \ldots, P_N \in K$ (di fatto, possiamo avere anche infiniti di questi punti, si pensi per esempio al caso di una funzione costante, ma il ragionamento è analogo). Calcoliamo f su ciascuno di questi punti, ottenendo quindi N valori $f(P_1), \ldots, f(P_N)$, non necessariamente tutti distinti. Fra questi valori prendiamo il più piccolo e il più grande,

$$m = \min\{f(P_j);\ j = 1, \ldots N\}, \qquad M = \max\{f(P_j);\ j = 1, \ldots N\}.$$

Poiché i punti di massimo e minimo assoluto di f, che esistono per il teorema di Weierstrass, vanno ricercati fra questi punti, concludiamo immediatamente che i punti P_j sui quali $f(P_j) = m$ sono i punti di minimo assoluto, mentre i punti P_j sui quali $f(P_j) = M$ sono i punti di massimo assoluto.

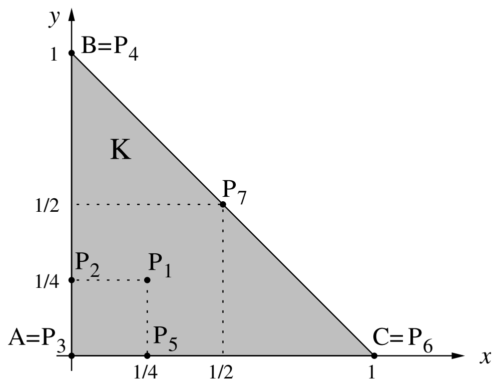
Esempio 3.23. Riprendiamo l'Esempio 3.4. Dobbiamo determinare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + 2$$

sul triangolo K di vertici $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (1, 0)$, cioè

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}.$$

La funzione f è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$ e K è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$. In particolare f è continua nell'insieme chiuso e limitato K, quindi per il Teorema 3.7 di Weierstrass ammette punti di massimo e minimo assoluto in K. Per quanto detto sopra, tali punti di estremo assoluto andranno ricercati



fra gli eventuali punti stazionari interni a K, gli eventuali punti stazionari vincolati su $\Gamma = \partial K$ e i vertici del triangolo.
Cominciamo a determinare i punti stazionari di f:

$$\begin{cases} f_x = 8x - 2 = 0, \\ f_y = 8y - 2 = 0, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1/4, \\ y = 1/4. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario di f è quindi $P_1 = (1/4, 1/4)$, che è interno a K e che quindi deve essere preso in considerazione come uno dei possibili candidati a punto di estremo assoluto.
Cerchiamo ora di determinare gli eventuali punti di estremo vincolato di f sulla frontiera Γ di ∂K. Tale frontiera è l'unione dei tre segmenti AB, BC e AC. Studiamo la restrizione di f su ciascuno dei tre segmenti.

1. Restrizione al segmento AB: possiamo parametrizzare il segmento con la curva $\gamma_1(y) = (0, y)$, $y \in [0, 1]$. La restrizione di f a tale curva è

$$h_1(y) = f(0, y) = 4y^2 - 2y + 2, \qquad y \in [0, 1].$$

In questo caso è molto semplice studiare l'andamento della funzione h_1; per i nostri fini è comunque sufficiente osservare che i punti di estremo di h_1 in $[0, 1]$ vanno cercati fra i suoi punti stazionari in $(0, 1)$, vale a dire i punti $y \in (0, 1)$ per i quali $h_1'(y) = 0$, e gli estremi $y = 0$ e $y = 1$ dell'intervallo stesso. Poiché $h_1'(y) = 8y - 2$ si annulla solo in $y = 1/4$, otteniamo il punto stazionario vincolato

$$P_2 = \gamma_1 \left(\frac{1}{4} \right) = \left(0, \frac{1}{4} \right),$$

a cui vanno aggiunti i punti che si ottengono per $y = 0$ e $y = 1$, cioè gli estremi $P_3 = A = (0, 0)$ e $P_4 = B = (0, 1)$ del segmento stesso. (In realtà si verifica facilmente che h_1 ha un punto di minimo assoluto in $y = 1/4$, mentre il punto di massimo assoluto nell'intervallo $[0, 1]$ è $y = 1$. Di conseguenza, il punto A, che corrisponde a $y = 0$, non sarà punto di estremo assoluto di f in K, in quanto non è nemmeno punto di estremo assoluto di f sul segmento AB. È però evidente che il fatto di includere anche il punto A fra i possibili candidati, come abbiamo fatto sopra, non arreca alcun danno: semplicemente, avremo un candidato in più su cui calcolare la funzione.)

2. Restrizione al segmento AC: possiamo parametrizzare il segmento con la curva $\gamma_2(x) = (x, 0)$, $x \in [0, 1]$. La restrizione di f a tale curva è

$$h_2(y) = f(x, 0) = 4x^2 - 2x + 2, \qquad x \in [0, 1].$$

Otteniamo dunque la funzione già studiata nel punto precedente. Aggiungiamo quindi alla lista dei candidati il punto

$$P_5 = \gamma_2\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right),$$

più gli estremi del segmento stesso: il punto A è già presente nella lista dei candidati, quindi aggiungiamo solo $P_6 = C = (1, 0)$.

3. Restrizione al segmento BC: possiamo parametrizzare il segmento con la curva $\gamma_3(x) = (x, 1 - x)$, $x \in [0, 1]$. La restrizione di f a tale curva è

$$h_3(x) = f(x, 1 - x) = 8x^2 - 8x + 4, \qquad x \in [0, 1].$$

Abbiamo che $h_3'(x) = 16x - 8$, quindi h_3' si annulla nel punto $x = 1/2$ che appartiene all'intervallo $(0, 1)$; otteniamo quindi il punto stazionario vincolato

$$P_7 = \gamma_3\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Gli estremi del segmento BC sono già stati inclusi nella lista dei "candidati".

In conclusione, abbiamo ottenuto sette candidati $P_1, \ldots, P_7$ a punti di estremo assoluto. Si tratta ora di valutare la funzione f in questi sette punti per stabilire quali sono quelli di minimo e massimo assoluto:

$$f(P_1) = \frac{3}{2}, \; f(P_2) = f(P_5) = \frac{7}{4}, \; f(P_3) = f(P_7) = 2, \; f(P_4) = f(P_6) = 4.$$

Dei quattro valori distinti assunti in questi sette punti, il più piccolo è $3/2$, che viene assunto solo in P_1, mentre il più grande è 4, che viene assunto in P_4 e P_6. Concludiamo quindi che l'unico punto di minimo assoluto di f in K è P_1, mentre i punti di massimo assoluto di f in K sono P_4 e P_6.

Osserviamo che, in questo caso, l'esercizio si poteva risolvere anche in maniera geometrica. La funzione f si può infatti riscrivere come

$$f(x,y) = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = 4\,d((x,y),P_1)^2 + \frac{3}{2},$$

dove $d((x,y),P_1)$ indica la distanza del punto (x,y) dal punto $P_1 = (1/4, 1/4)$. È dunque chiaro che i punti di massimo e minimo assoluto di f in K coincidono con i punti di massimo e minimo assoluto della distanza $d((x,y),P_1)$ da P_1. Ovviamente il minimo di tale distanza viene raggiunto in P_1 stesso; semplici considerazioni geometriche permettono di stabilire che il massimo viene invece raggiunto nei punti P_4 e P_6.

Esempio 3.24. Consideriamo la funzione $f(x,y) = x^3 + 3y$. Vogliamo determinare i punti di estremo assoluto di f vincolati al cerchio $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$. Poiché f è una funzione continua e K è un insieme chiuso e limitato, il Teorema 3.7 di Weierstrass garantisce l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluto in K.
La funzione f è anche di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$. Per quanto detto sopra, i punti di estremo assoluto vanno ricercati fra gli eventuali punti stazionari interni a K, appartenenti cioè all'insieme aperto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$, e fra gli eventuali punti di estremo vincolato sulla frontiera Γ di K, che è la circonferenza $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$.
Poiché $f_x(x,y) = 3x^2$ e $f_y(x,y) = 3$, la funzione f non ha punti stazionari. I punti di estremo assoluto in K che, ripetiamo, esistono per il teorema di Weierstrass, devono quindi trovarsi necessariamente sulla frontiera Γ di K.
Determiniamo ora i punti di estremo vincolato. La circonferenza Γ è il sostegno della curva regolare $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Possiamo dunque considerare la funzione composta

$$h(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^3 t + 3\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

e determinare i punti stazionari di h nell'intervallo $[0, 2\pi]$. La derivata di h è data da

$$h'(t) = -3\cos^2 t \sin t + 3\cos t = 3\cos t(1 - \sin t\cos t) = 3\cos t\left(1 - \frac{1}{2}\sin(2t)\right).$$

Osserviamo che il fattore $1 - \sin(2t)/2$ è sempre strettamente positivo, quindi $h'(t)$ si annulla nei punti dove si annulla $\cos t$, cioè in $t_1 = \pi/2$ e $t_2 = 3\pi/2$, a cui corrispondono i punti stazionari vincolati

$$P_1 = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1), \qquad P_2 = \gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-1).$$