Formulario di geometria differenziale

1 Curve

$\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ curva biregolare con parametrizzazione arbitraria

Riferimento di Frenet

$$\mathbf{t} = \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \quad \mathbf{n} = \frac{(\sigma' \wedge \sigma'') \wedge \sigma'}{\|(\sigma' \wedge \sigma'')\|\|\sigma'\|} \quad \mathbf{b} = \frac{\sigma' \wedge \sigma''}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}$$

Curvatura e torsione

$$k = \frac{\|\sigma' \wedge \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3} \qquad \tau = \frac{< \sigma' \wedge \sigma'', \sigma''' >}{\|\sigma' \wedge \sigma''\|^2}$$

Formule di Frenet $\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = -\tau \mathbf{n} \end{cases}$

2 Superfici

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, $p \in S$, $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione in p.
$v \in T_pS$, $v = v_1\partial_1 + v_2\partial_2$

Punti ellittici, iperbolici, parabolici, planari, ombelicali

- p elittico se $K(p) > 0$
- p iperbolico se $K(p) < 0$

- p parabolico se $K(p) = 0 \wedge dN_p \neq 0$
- p planare se $K(p)$=0 $\wedge$ dN_p=0
- p ombelicale se dN_p è un multiplo dell'identità di $\mathrm{T}_p\mathrm{S}$

Coefficienti di forma

$$e = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_1}^2} \right\rangle$$
$$f = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle$$
$$g = \left\langle N \circ \varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_2}^2} \right\rangle$$

Seconda forma fondamentale

$$Q_p(v) = e(x){v_1}^2 + 2f(x)v_1v_2 + g(x){v_2}^2$$

Matrice di *dN* rispetto alla base $\{\partial_{\mathbf{1}}, \partial_{\mathbf{2}}\}$

$$A = -\frac{1}{EG - F^2}\begin{bmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{bmatrix}$$

Curvatura Gaussiana

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Curvatura media

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

Curvature principali

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Coefficienti di forma, curvatura principale e media di un grafico

$U \subset \mathbb{R}^2$ aperto, h $\in$ C $^\infty$(U), $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione locale del grafico Γ_h data da φ(x)=(*x*,*h(x)*)

$e = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}}\dfrac{\partial^2 h}{\partial {x_1}^2} \quad f = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}}\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \quad g = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h\|^2}}\dfrac{\partial^2 h}{\partial {x_2}^2}$

$K = \dfrac{1}{(1 + \|\nabla h\|^2)^2} detHess(h)$

$H = \dfrac{1}{2(1 + \|\nabla h\|^2)^{3/2}}\left[\dfrac{\partial^2 h}{\partial {x_1}^2}\left(1 + |\dfrac{\partial h}{\partial x_2}|^2\right) + \dfrac{\partial^2 h}{\partial {x_2}^2}\left(1 + |\dfrac{\partial h}{\partial x_1}|^2\right) - 2\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}\dfrac{\partial h}{\partial x_1}\dfrac{\partial h}{\partial x_2}\right]$

3 Geodetiche

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, $\varphi : U \longrightarrow S$ parametrizzazione locale,
$\sigma : I \longrightarrow S$ curva con $\sigma(I) \subset \varphi(U)$. ξ campo vettoriale lungo σ
$\sigma(t) = \varphi(\sigma_1(t), \sigma_2(t))$, $\quad \xi(t) = \xi_1(t)\partial_1|_{\sigma(t)} + \xi_2(t)\partial_2|_{\sigma(t)}$

$$D\xi = \sum_{k=0}^{2} \left[\frac{d\xi_{\mathrm{k}}}{dt} + \sum_{i,j=1}^{2} (\Gamma^{\mathrm{k}}{}_{ij} \circ \sigma) \sigma_i{}' \xi_j \right] \partial_k|_\sigma$$

$\sigma = \varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ è una geodetica se e solo se

$$\sigma_{\mathrm{j}}{}'' + \sum_{h,k=1}^{2} (\Gamma_{hk}{}^{j} \circ \sigma) \sigma_h{}' \sigma_k{}' = 0, \qquad j = 1, 2$$