Vogliamo raccogliere qui alcune dimostrazioni di quello che è noto con il pomposo nome di Teorema fondamentale dell'algebra . L'enunciato è molto semplice ed è noto a tutti i matematici:

Teorema (fondamentale dell'algebra)**.** *Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è algebricamente chiuso. In altre parole ogni polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette una radice complessa.*

Corollario. *Ogni polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ si spezza come prodotto di fattori lineari:*

$$f(x) = \lambda(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

per opportuni $\lambda, x_i \in \mathbb{C}$, eventualmente coincidenti.

Però forse non è nota a tutti la varietà di modi diversi in cui questo risultato può essere dimostrato. Gli argomenti che daremo sono dovuti a diversi matematici, ma fra di essi si distingue Gauß, che ha dato una prima dimostrazione del teorema nella sua tesi di dottorato e nel corso della sua carriera ne ha trovate altre tre. Storicamente, però la prima dimostrazione (quasi) completa è dovuta a D'Alembert, che ha presentato un argomento simile al nostro primo approccio. Nella letteratura sono presenti altri approcci alla dimostrazione; abbiamo evitato di dare più versioni sostanzialmente equivalenti di una stessa dimostrazione, tranne nel caso in cui una delle versioni fosse sostanzialmente elementare.

Parlando del Teorema fondamentale dell'algebra non si può evitare di citare il libro di Fine e Rosenberger ([FR97]). In quel caso lo scopo è didattico: gli autori usano il Teorema fondamentale dell'algebra come pretesto per insegnare vari strumenti di topologia, analisi complessa e algebra. Questo articolo ha invece lo scopo di raccogliere una varietà di dimostrazioni diverse e, a differenza del libro, non è autocontenuto. Il background necessario per leggere le diverse dimostrazioni varia; è comunque utile avere una minima familiarità con le funzioni olomorfe (ad esempio dai primi capitoli di [Lan99] o [Car95]), il gruppo fondamentale ([Hat02, cap. 1]) e un po' di teoria dei campi. Un'inesauribile fonte di dimostrazioni e commenti sul Teorema fondamentale dell'algebra è l'American Mathematical Monthly, dal quale abbiamo attinto per diversi approcci.

1. Dimostrazioni elementari

In questa sezione presentiamo gli argomenti che non richiedono conoscenze di analisi complessa, algebra o topologia. Tutto quello che è richiesto è di un primo corso in analisi (oltre che, ovviamente, un po' di familiarità con i numeri complessi). In realtà le dimostrazioni di questa sezione consistono in versioni semplificate di argomenti più concettuali che compariranno più avanti. Ad esempio la prima dimostrazione, dovuta a D'Alembert, presenta in forma elementare lo stesso ragionamento della dimostrazione III.

Lemma 1. *Sia $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio non costante. Allora*

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

In altre parole un polinomio non costante è coercivo.

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Prendendo il valore assoluto e raccogliendo un termine $|z|^n$ troviamo

$$|f(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right|.$$

Per $|z| \to +\infty$ troviamo che $\frac{a_k}{z^{n-k}} \to 0$ per $k > 0$, perciò

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = \lim_{|z| \to +\infty} |a_n||z^n| = +\infty.$$

□

Teorema fondamentale dell'algebra I. Sia $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ non costante. Il lemma precedente ci garantisce l'esistenza di $R > 0$ tale che $|f(z)| > M := f(0)$ per $|z| > R$. Dunque

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \inf_{z \in \overline{B(0,R)}} |f(z)|.$$

Poiché la palla $\overline{B(0,R)}$ è un compatto, $|f|$ ammette minino su $\mathbb{C}$ (questa è la parte mancante nell'argomento originale di D'Alembert). Sia z_0 un punto di minimo per $|f|$: vogliamo vedere che $f(z_0) = 0$.

L'argomento, in modo informale, è il seguente. Possiamo sviluppare f intorno a z_0; salvo il termine costante il comportamento qualitativo di f intorno a un punto è lo stesso di una potenza (quella che corrisponde al termine di grado pi basso in questo sviluppo). Ma una potenza è surgettiva nell'intorno dello 0, perciò ci possiamo spostare di poco da z_0 in modo che $|f(z)| < |f(z_0)|$.

Non è difficile rendere rigoroso tutto questo. Supponiamo per assurdo che $|f(z_0)| > 0$ e scriviamo

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{j=k}^{n} a_j (z - z_0)^j,$$

dove $k \geq 1$ è scelto in modo che $a_k \neq 0$. Scegliamo $h \in \mathbb{C}$ in modo che $a_k h^k = -f(z_0)$, e poniamo $z = z_0 + \varepsilon h$, con $\varepsilon > 0$ e piccolo. Indicando

$$g(z) = \sum_{j=k+1}^{n} a_j (z - z_0)^j,$$

si ricava

$$|f(z)| \leq |f(z_0) + \varepsilon^k a_k h^k| + |g(z)| \leq (1 - \varepsilon^k)|f(z_0)| + \varepsilon^{k+1} \left| \sum_{j=k+1}^{n} a_j h^j \varepsilon^{j-k-1} \right|.$$

Se ε è scelto abbastanza piccolo questo valore è minore di $|f(z_0)|$, assurdo. □

La prossima dimostrazione, tratta da [Bur06], richiede il teorema di Fubini per integrali in due variabili, ma per il resto è altrettanto elementare della precedente.

Teorema fondamentale dell'algebra II. Sia $f(z)$ un polinomio non costante, e supponiamo pr assurdo che non si annulli; possiamo allora considerare $g = 1/f$, che è una funzione razionale definita su tutto $\mathbb{C}$. Indichiamo con g' la derivata formale di g, ovvero

$$g'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}.$$