

**Geometria Differenziale. a.a. 2007-08.**

**Prof. P. Piazza**

**Fibrati vettoriali: definizioni e prime proprietà.**

**0.1. Definizione di fibrato vettoriale.**

**Definizione 1.** Un *fibrato vettoriale* reale  $C^\infty$  di rango  $k$  è una terna  $(E, \pi, M)$ , dove  $E$  e  $M$  sono varietà  $C^\infty$ ,  $\pi : E \rightarrow M$  è un'applicazione  $C^\infty$  suriettiva, tale che per ogni  $m \in M$

- (i) la fibra  $E_m = \pi^{-1}(m)$  ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione  $k$ ;
- (ii) esiste un intorno  $U$  di  $m$  e un diffeomorfismo  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  tale che per ogni  $m' \in U$

a)  $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$

b)  $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \rightarrow \{m'\} \times \mathbb{R}^k$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà  $M$  è detta *base* del fibrato; la varietà  $E$  è detta *spazio totale* del fibrato.

Gli intorni  $U$  sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi  $\varphi_U$  *banalizzazioni locali*.

Se per ogni  $m \in M$  l'intorno  $U$  può essere scelto uguale ad  $M$ , il fibrato vettoriale si dice *banale*.

**Notazione.** Denoteremo spesso il fibrato  $(E, \pi, M)$  con  $(E \rightarrow M)$ , oppure, semplicemente con  $E$ .

**Definizioni analoghe.**

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue. Si parla allora di fibrati vettoriali topologici.

- Fibrati vettoriali complessi (le fibre sono spazi vettoriali su  $\mathbb{C}$ ).

**0.2. Funzioni di transizione.**

Dalla definizione segue che  $M$  ammette un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante*. Per ogni coppia di aperti  $U_\alpha, U_\beta$  del ricoprimento, con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , e per ogni  $m \in U_\alpha \cap U_\beta$  l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left( \varphi_{U_\beta}^{-1} \Big|_{\{m\} \times \mathbb{R}^k} \right) : \\ \{m\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Allora possiamo pensare alle  $g_{\alpha\beta}(m)$  come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà dette di *cociclo*:

- 1)  $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$  in  $U_\alpha \cap U_\beta$ ,
- 2)  $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$  in  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Se  $M$  è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  di  $M$  e mappe  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$  soddisfacenti le proprietà 1) e 2) (brevemente, un cociclo), allora è possibile

definire un fibrato vettoriale  $(E, \pi, M)$  che ammetta le  $g_{\alpha\beta}$  come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme  $\widehat{E}$  ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ; introduciamo una relazione d'equivalenza  $\mathcal{R}$  in  $\widehat{E}$  come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia  $E$  lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia  $\pi : E \rightarrow M$  la mappa che associa alla classe d'equivalenza di  $(x, e)$  il punto  $x \in M$ . Un esercizio molto istruttivo consiste nel dimostrare che  $(E, \pi, M)$  ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà  $M$  su cui siano dati un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  e una collezione di mappe  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$  soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

### 0.3. Morfismi di fibrati.

**Definizione 2.** Siano  $(E, \pi, M)$  e  $(F, \pi', M)$  due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una *mappa di fibrati* (o un *morfismo di fibrati*) da  $(E, \pi, M)$  a  $(F, \pi', M)$  è un'applicazione differenziabile  $f : E \rightarrow F$  che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni  $m \in M$

- 1)  $f(E_m) \subseteq F_m$
- 2)  $f|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m$  è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Una mappa di fibrati  $f : E \rightarrow F$  si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorfismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni  $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analogia definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che  $f$  sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).

Il seguente lemma è di facile dimostrazione.

**Lemma 1.** Siano  $(E, \pi_E, M)$  e  $(F, \pi_F, M)$  due fibrati vettoriali. Sia  $f : E \rightarrow F$  un morfismo di fibrati e supponiamo che  $f|_{E_m}$  sia un isomorfismo per ogni  $m \in M$ ; allora  $f$  è un isomorfismo di fibrati (e cioè  $f$  è anche un diffeomorfismo).

### 0.4. Esempi notevoli.

**Esempio 1.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Per ogni punto  $m \in M$  indichiamo con  $T_m M$  lo spazio tangente alla varietà  $M$  nel punto  $m$ . Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

e definiamo  $\pi : TM \rightarrow M$  ponendo  $\pi(x) = m$  se  $x \in T_m M$ . Si verifica che  $(TM, \pi, M)$  è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di  $M$ . Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad  $M$ .

**Esempio 2.** Sia  $\mathbb{R}P^n$  lo spazio proiettivo di dimensione  $n$ . Ricordiamo che  $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$ , dove  $\sim$  è la relazione che identifica i vettori  $\underline{x}$  e  $-\underline{x}$ . Sappiamo che  $\mathbb{R}P^n$  è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\}$$

e l'applicazione  $\pi : E_{1,n+1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$  definita da  $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$ . La terna  $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$  è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni

$[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$ , consideriamo  $U_1$ , un intorno di  $\underline{x}$  in  $S^n$  ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto  $U = U_1 / \sim \subseteq \mathbb{R}P^n$  è un intorno banalizzante di  $[\underline{x}]$  e il diffeomorfismo  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}$  definito da  $\varphi_U([\underline{x}], t\mathbf{x}) = ([\underline{x}], t)$  è una banalizzazione locale.

Analogamente la terna  $(E_{1,n+1}(\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}P^n)$  è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

**Esempio 3.** Sia  $n > k$ . Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{\text{sottospazi vettoriali } k\text{-dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio  $G_k(\mathbb{R}^n)$  ha una naturale topologia: sia  $V_k(\mathbb{R}^n)$  l'aperto di  $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$   $k$ -volte costituito dalle  $k$ -ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione  $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo  $G_k(\mathbb{R}^n)$  della topologia quoziente:  $U$  è aperto in  $G_k(\mathbb{R}^n)$  se e solo se  $\pi^{-1}(U)$  è aperto in  $V_k(\mathbb{R}^n)$ .

$G_k(\mathbb{R}^n)$  ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta di dimensione  $n(n-k)$ . Consideriamo l'insieme

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione  $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$  definita da  $\pi(p, \underline{v}) = p$ . La terna  $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$  è un fibrato vettoriale di rango  $k$  e  $C^\infty$ . Le verifiche di tutte queste affermazioni costituiscono un interessante esercizio. Si noti che per  $k = 1$  riotteniamo l'esempio 2.

$G_k(\mathbb{R}^n)$  è detta la Grassmanniana dei  $k$ -piani in  $\mathbb{R}^n$ .  $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$  è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

### Osservazioni.

1. C'è un'applicazione naturale

$$(1) \quad \psi : G_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$$

ottenuta mandando  $V$  in  $V^\perp$ . Quest'applicazione è un diffeomorfismo.

2. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana  $G_k(\mathbb{R}^n)$  come l'insieme dei sottospazi di *codimensione*  $k$  in  $\mathbb{R}^n$ . Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione  $\psi$  in (??).

### 0.5. Sezioni di un fibrato.

**Definizione 3.** Sia  $(E, \pi, M)$  un fibrato vettoriale. Una *sezione*  $C^\infty$  del fibrato è un'applicazione differenziabile  $s : M \rightarrow E$  tale che  $\pi \circ s = \text{Id}|_M$  ovvero tale che per ogni  $m \in M$  risulti  $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$ .

**Definizione 4.** Una sezione del fibrato tangente ad una varietà differenziabile è detto un campo di vettori.

Denotiamo con  $C^\infty(M, E)$  l'insieme delle sezioni  $C^\infty$  del fibrato  $(E, \pi, M)$ . Si noti che, poiché ogni fibra è uno spazio vettoriale, anche  $C^\infty(M, E)$  è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che  $C^\infty(M, E)$  ha una naturale struttura di  $C^\infty(M)$ -modulo.

**Proposizione 1.** Un fibrato vettoriale  $(E, \pi, M)$  di rango  $k$  è banale se e solo se esistono  $k$  sezioni  $C^\infty$   $s_1, \dots, s_k$  linearmente indipendenti, ovvero tali che  $s_1(m), \dots, s_k(m)$  siano linearmente indipendenti per ogni  $m \in M$ .

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  Supponiamo  $(E, \pi, M)$  banale. Allora esiste una mappa di fibrati  $\Phi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$  che induce un isomorfismo  $\Phi : E_m \rightarrow \{m\} \times \mathbb{R}^k$  su ogni fibra. Sia  $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$  e definiamo le applicazioni  $s_i : M \rightarrow E$  ponendo  $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$  (dove  $\underline{e}_i$  è l' $i$ -simo vettore canonico di  $\mathbb{R}^k$ ). Le applicazioni  $s_1, \dots, s_k$  sono sezioni  $C^\infty$  e per costruzione sono linearmente indipendenti.

$\Leftarrow$  Supponiamo che esistano  $k$  sezioni  $C^\infty$   $s_1, \dots, s_k$  linearmente indipendenti. Definiamo  $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$  ponendo  $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + \dots + x^k s_k(m)$ . L'applicazione  $\Psi$  è  $C^\infty$  e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora, per il Lemma,  $\Psi$  è un diffeomorfismo. Quindi  $(E, \pi, M)$  è banale.  $\square$

**Osservazione.** Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di  $k$  sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**.

**Esempio.** Il fibrato  $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$  non è banale.

*Dimostrazione.* Basta far vedere che ogni  $s \in C^\infty(\mathbb{R}P^n, E_{1,n+1}(\mathbb{R}))$  si annulla in un punto. Sia  $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E_{1,n+1}(\mathbb{R})$  una sezione. Sia  $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  la proiezione canonica. L'applicazione  $q = s \circ p : S^n \rightarrow E_{1,n+1}(\mathbb{R})$  è tale che  $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$ , con  $t \in C^\infty(S^n)$ . Inoltre, poiché  $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$ , si deve avere  $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$ . Allora, poiché  $S^n$  è connessa e in particolare  $t \in C^0(S^n)$ , deve esistere  $\underline{x}_0 \in S^n$  tale che  $t(\underline{x}_0) = 0$ , ovvero tale che  $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$ .  $\square$

## 0.6. Operazioni sui fibrati.

Dati 2 fibrati su  $M$ ,  $(E, \pi^E, M)$  e  $(F, \pi^F, M)$ , si possono definire i fibrati

$$E^*, \quad \text{Bil}(E), \quad E \oplus F, \quad \text{Hom}(E, F)$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E \oplus F := \cup_{m \in M} E_m \oplus F_m;$$

rimane allora definito il fibrato  $(E \oplus F, \pi^{E \oplus F}, M)$  che per costruzione ha come fibre  $(\pi^{E \oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$ . La banalità locale è ereditata da quella di  $E$  ed  $F$ : per ipotesi  $\forall m \in M$  esistono aperti  $U^E, U^F$  e diffeomorfismi locali

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \rightarrow U^E \times \mathbb{R}^k$$

$$\phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \rightarrow U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E \oplus F} : (\pi^{E \oplus F})^{-1}(U^E \cap U^F) \rightarrow U^E \cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di  $E \oplus F$ . Lascio a voi i dettagli.

Possiamo anche definire

$$E \otimes F, \quad \Lambda^n E$$

ma qui assumo che abbiate familiarità con la definizione di prodotto tensoriale e algebra esterna.

## 0.7. Metrica su un fibrato.

Dato un fibrato reale  $(E, \pi, M)$ , si definisce una metrica  $g$  come una sezione del fibrato  $\text{Bil}(E)$ ,  $g \in C^\infty(M, \text{Bil}(E))$ , tale che  $g(m)$ , forma bilineare su  $E_m \times E_m$ , sia *simmetrica*  $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$  e definita positiva:

$$g(m)(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in E_m$$

**Definizione 5.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *metrica riemanniana* su  $M$  è per definizione una metrica sul fibrato tangente  $TM$ .