Geometria Differenziale. a.a. 2006-07.
Prof. P. Piazza
Fibrati vettoriali: definizioni e prime proprietà.

0.1. **Definizione di fibrato vettoriale.**

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale* C^∞ di rango k è una terna (E, π, M), dove E e M sono varietà C^∞, $\pi : E \to M$ è un'applicazione C^∞ suriettiva, tale che per ogni $m \in M$

(i) la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k;

(ii) esiste un intorno U di m e un diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $m' \in U$

a) $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$

b) $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \to \{m'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà M è detta *base* del fibrato; la varietà E è detta *spazio totale* del fibrato.
Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali.*
Se per ogni $m \in M$ l'intorno U può essere scelto uguale ad M, il fibrato vettoriale si dice *banale.*

Notazione. Denoteremo spesso il fibrato (E, π, M) con $(E \to M)$, oppure, semplicemente con E.

Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue. Si parla allora di fibrati vettoriali topologici.

- Fibrati vettoriali su $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

0.2. **Funzioni di transizione.**

Dalla definizione segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante.* Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left(\varphi^{-1}_{U_\beta}\Big|_{\{m\}\times\mathbb{R}^k} \right) :$$
$$\{m\} \times \mathbb{R}^k \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Allora possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}(m)$ come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà dette di *cociclo*:
1) $g^{-1}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ in $U_\alpha \cap U_\beta$,
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Se M è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2) (brevemente, un cociclo), allora è possibile definire un fibrato vettoriale (E, π, M) che ammetta le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme $\widehat{E}$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\, \mathcal{R}\, (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to M$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in M$. Un esercizio istruttivo consiste nel dimostrare che (E, π, M) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà M su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL\,(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

0.3. **Morfismi di fibrati.**

Definizione 2. Siano (E, π, M) e (F, π', M) due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una *mappa di fibrati* (o un *morfismo di fibrati*) da (E, π, M) a (F, π', M) è un'applicazione differenziabile $f : E \to F$ che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni $m \in M$

1) $f\,(E_m) \subseteq F_m$
2) $f|_{E_m} : E_m \to F_m$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Una mappa di fibrati $f : E \to F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorphismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \to F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analoga definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che f sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).
Il seguente lemma è di facile dimostrazione.

Lemma 1. Siano (E, π_E, M) e (F, π_F, M) due fibrati vettoriali. Sia $f : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $f|_{E_m}$ sia un isomorfismo per ogni $m \in M$. Verificare che f è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè f è anche un diffeomorfismo).

0.4. **Esempi notevoli.**

Esempio 1. Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con T_mM lo spazio tangente alla varietà M nel punto m. Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_mM$$

e definiamo $\pi : TM \to M$ ponendo $\pi\,(x) = m$ se $x \in T_mM$. Si verifica che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M.

Esempio 2. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Sappiamo che $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_{1,n+1}\,(\mathbb{R}) = \left\{ ([\underline{x}]\,, \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x} \right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_{1,n+1}\,(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi\,([\underline{x}]\,, \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $(E_{1,n+1}\,(\mathbb{R})\,, \pi, \mathbb{R}P^n)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni

$[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, consideriamo U_1, un intorno di $\underline{x}$ in S^n ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto $U = U_1/\sim \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e il diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$ è una banalizzazione locale.
Analogamente la terna $(E_{1,n+1}(\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}P^n)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

Esempio 3. Sia $n > k$. Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{\text{sottospazi vettoriali } k-\text{dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale topologia: sia $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'aperto di $\mathbb{R}^n \times \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ k-volte costituito dalle k-ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente: U è aperto in $G_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $V_k(\mathbb{R}^n)$.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-k)$. Consideriamo l'insieme

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ definita da $\pi(p, \underline{v}) = p$. La terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale di rango k e C^∞. Le verifiche di tutte queste affermazioni costituiscono un interessante esercizio. Si noti che per $k = 1$ riotteniamo l'esempio 2.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ è detta la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$. $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

Osservazioni.
1. Se $T \in GL(n, \mathbb{R})$ allora T induce un'applicazione $T_\sharp : G_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$, che è un diffeomorfismo.
2. C'è un'applicazione naturale

$$\psi : G_k(\mathbb{R}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

ottenuta mandando V in $V^\perp$. Quest'applicazione è un diffeomorfismo.
3. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana $G_k(\mathbb{R}^n)$ come l'insieme dei sottospazi di *codimensione* k in $\mathbb{R}^n$. Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione ψ in (1).

0.5. **Sezioni di un fibrato.**

Definizione 3. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una *sezione* C^∞ del fibrato è un'appl. differenziabile $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}|_M$ ovvero tale che per ogni $m \in M$ risulti $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$.

Definizione 4. Una sezione del fibrato tangente ad una varietà differenziabile è detto un campo di vettori.

Denotiamo con $C^\infty(M, E)$ l'insieme delle sezioni C^∞ del fibrato (E, π, M). Si noti che, poiché ogni fibra è una spazio vettoriale, anche $C^\infty(M, E)$ è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che $C^\infty(M, E)$ ha una naturale struttura di $C^\infty(M)$-mudulo.

Proposizione 1. *Un fibrato vettoriale (E, π, M) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni C^∞ $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(m), ..., s_k(m)$ siano linearmente indipendenti per ogni $m \in M$.*

Dimostrazione.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo (E,π,M) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi : E_m \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to E$ e definiamo le applicazioni $s_i : M \to E$ ponendo $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$ (dove $\underline{e}_i$ è l'i -simo vettore canonico di $\mathbb{R}^k$). Le applicazioni $s_1,...,s_k$ sono sezioni C^∞ e per costruzione sono linearmente indipendenti.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che esistano k sezioni C^∞ $s_1,...,s_k$ linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \to E$ ponendo $\Psi(m,\underline{x}) = x^1 s_1(m) + ... + x^k s_k(m)$. L'applicazione Ψ è C^∞ e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora è facile vedere che Ψ è un diffeomorfismo. Quindi (E,π,M) è banale. $\square$

Osservazione. Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di k sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**.

Esempio. Il fibrato $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$ non è banale.

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C^\infty(\mathbb{R}P^n,\, E_{1,n+1}(\mathbb{R}))$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \to E_{1,n+1}(\mathbb{R})$ una sezione. Sia $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \to E_{1,n+1}(\mathbb{R})$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\, \underline{x})$, con $t \in C^\infty(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e in particolare $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S_n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. $\square$

Possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia (E,π,M) un fibrato vettoriale, con ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R})$. Una *sezione* C^∞ del fibrato è allora una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k$ differenziabili tali che per ogni coppia di aperti U_α e U_β non disgiunti e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m)\, s_\beta(m).$$

Le due definizioni sono equivalenti come ora mostreremo.
Sia s una sezione C^∞ (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia $m \in M$ e siano U_α un intorno di m banalizzante e φ_α una banalizzazione locale su U_α. Se $\underline{e}_1,...,\underline{e}_k$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha^{-1}(m,\underline{e}_1),...,\varphi_\alpha^{-1}(m,\underline{e}_k)$ sono una base di E_m. Quindi esistono k numeri, che chiamo

$$s_\alpha^1(m),...,s_\alpha^k(m)$$

tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m,\underline{e}_i).$$

Allora, considerando la restrizione di s a $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m,\underline{e}_i) = \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m)\, \varphi_\beta^{-1}(m,\underline{e}_i).$$

Applicando φ_α al secondo e terzo membro, si ha

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \underline{e}_i &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m) \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(m, \underline{e}_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, g_{\alpha\beta}(m)\,(\underline{e}_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\,(g_{\alpha\beta}(m))_i^j\,(\underline{e}_j)\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$s_\alpha^k(m) = s_\beta^i(m)\,(g_{\alpha\beta}(m))_i^k\,,$$

Allora, ponendo $s_\alpha = \left(s_\alpha^1, ..., s_\alpha^k\right)^t$, si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\, s_\beta.$$

Quindi la collezione $\{s_\alpha\}$ soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione.
Il viceversa è chiaro: se sono date le $\{s_\alpha\}$ e le banalizzazioni, allora possiamo definire una sezione globale s.

0.6. **Operazioni sui fibrati.**

Dati 2 fibrati su M (E, π^E, M), (F, π^F, M) si possono definire i fibrati

$$E^*\,,\quad \mathrm{Bil}(E)(\equiv E^* \otimes E^*)\,,\quad E \otimes F\,,\quad E \oplus F\,,\quad \Lambda^n E\,,\quad \mathrm{Hom}(E, F)(\equiv E \otimes F^*)$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E \oplus F := \cup_{m \in M} E_m \oplus F_m\,;$$

rimane allora definito il fibrato $(E \oplus F, \pi^{E\oplus F}, M)$ che per costruzione ha come fibre $(\pi^{E\oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$. La banalità locale è ereditata da quella di E ed F: per ipotesi $\forall m \in M$ esistono aperti U^E , U^F e diffeomorfismi locali

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \to U^E \times \mathbb{R}^k$$

$$\phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \to U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E\oplus F} : (\pi^{E\oplus F})^{-1}(U^E \cap U^F) \to U^E \cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di $E \oplus F$. Lascio a voi i dettagli.

0.7. **Sottofibrato.**

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Sia F una sottovarietà di E e supponiamo che $F \cap E_m$, con $E_m := \pi^{-1}(m)$, sia un sottospazio vettoriale di E_m. La terna $(F, \pi|_F, M)$ è per definizione un sottofibrato di E. Dalla condizione che F è una sottovarietà segue che $\forall x \in M\ \exists\, U$, intorno di x, e banalizzazioni locali di E :

$$\phi_U : E_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

tali che la loro restrizione ad F fornisce banalizzazioni locali di F:

$$\phi_U|_F : F_U \to U \times \mathbb{R}^\ell \subset U \times \mathbb{R}^k.$$

In termini delle funzioni di transizione: possiamo scrivere in una tale banalizzazione

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & j_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

e le $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(l, \mathbb{R})$ sono le funzioni di transizione di (F, π, M).

Con la stessa tecnica si può costruire il fibrato quoziente $(E/F, \pi, M)$ le cui funzioni di transizione sono le $j_{\alpha\beta}$.

0.8. **Metrica su un fibrato.**

Dato un fibrato reale (E, π, M), si definisce una metrica g come una sezione del fibrato $\mathrm{Bil}(E)$, $g \in C^\infty(M, \mathrm{Bil}(E))$, tale che $g(m)$, forma bilineare su $E_m \times E_m$, sia *simmetrica* $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$ e definita positiva:

$$g(m)(v, v) \geq 0 \ \forall v \in E_m$$

Definizione 5. Sia M una varietà differenziabile. Una *metrica riemanniana* su M è per definizione una metrica sul fibrato tangente TM.

0.9. **Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.**

Tramite le banalizzazioni locali abbiamo $\forall\ U_\alpha$, intorno banalizzante, una base locale di sezioni (già visto). Infatti se $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ è una banalizzazione locale, fissata una base e_i in $\mathbb{R}^k$, si ha una base locale di sezioni definita da:

$$s_i^\alpha(m) := \psi_\alpha(m, e_i) \in C^\infty(U_\alpha, E)$$

(Attenzione: indici in basso, queste sono **sezioni** del fibrato $E|_{U_\alpha}$...)
Se u, v sono sezioni di $\pi^{-1}(U_\alpha)$, allora $u = \lambda^i s_i^\alpha$ e $v = \mu^i s_i^\alpha$, dove si è utilizzata la convenzione della somma su indici ripetuti e:

$$g(u, v) = \lambda^i \mu^j g(s_i^\alpha, s_j^\alpha)$$

Dunque $\forall m \in U_\alpha$, $g(s_i^\alpha, s_j^\alpha)(m) := g_{ij}(\alpha)(m)$ è la matrice locale della metrica rispetto alla base locale $\{s_i^\alpha\}$ calcolata in m.
Sia $\{\sigma_i^\alpha\}$ un'altra base locale con

$$\sigma_i^\alpha = G_i^j s_j^\alpha$$

allora la matrice locale della metrica rispetto a σ_j^α, e cioè $g(\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\alpha)$, è uguale a $G^T g\, G$. In particolare, si considerino due intorni banalizzanti U_α, U_β ed in $U_\alpha \cap U_\beta$ le basi $\{s_i^\alpha\}$, $\{s_i^\beta\}$ definite come sopra utilizzando le due banalizzazioni, allora $s_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j s_j^\alpha$, dove vi ricordo ancora una volta che queste sono sezioni.
Se $g(\alpha)(m)$ è la matrice della metrica $\forall m \in U_\alpha$, si ha quindi :

$$g(\beta) = g_{\alpha\beta}^T\, g(\alpha)\, g_{\alpha\beta}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per definire la metrica mediante le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.

0.10. **Fibrato normale.**

Sia F un sottofibrato di E dotato di metrica g, allora è ben definito il sottofibrato:

$$F^{\perp} = \bigcup_{m \in M} F_m^{\perp}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $E/F \simeq F^{\perp}$
- $F \oplus F^{\perp} \simeq E$
- Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà e si considera il sottofibrato $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M$, allora $N_M \equiv (TM)^{\perp}$ è il fibrato normale ad M.
- Analogamente se $M \subseteq (X, g)$ è una sottovarietà di una varietà riemanniana X dotata di metrica g, allora $(TM)^{\perp} \equiv N_{M/X}$, l'ortogonale di TM in $TX|_M$, è il fibrato normale ad M in X.