Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24
Prof. P. Piazza
Brevi note sul prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$

Introduzione. Il nostro punto di partenza è lo spazio ordinario e le sue proprietà elementari. In una prima approssimazione possiamo pensare allo spazio ordinario come allo spazio fisico circostante. Le sue proprietà elementari nascono dall'esperienza: i concetti geometrici di punto, retta, piano, la loro mutua posizione, la nozione di distanza, angolo etc... nascono da nozioni concrete tratte dalla considerazione dello spazio fisico. Da un punto di vista matematico queste definizioni e queste proprietà elementari (ad esempio *per due punti passa una ed una sola retta*) non possono essere dimostrate sulla base dell'esperienza fisica. Il primo a capire questa difficoltà fu Euclide il quale estrasse alcuni assiomi fondamentali sui quali fondare rigorosamente la geometria. Gli assiomi, insieme alle proprietà che da essi si possono dedurre, formano il complesso della Geometria Euclidea, che è quella che si studia alla scuola media e al liceo. Seguendo la trattazione data da David Hilbert nel suo celebre *Fondamenti della geometria*, gli assiomi della geometria euclidea si possono riassumere in cinque gruppi
1. Assiomi di appartenenza (del tipo *per tre punti non-allineati passa uno ed un solo piano...*).
2. Assiomi di ordine (permettono di fissare un verso su una retta)
3. Assiomi di congruenza (danno la nozione di confronto ed uguaglianza fra segmenti e fra angoli).
4. Assiomi di continuità (quelli dei numeri reali).
5. Assioma delle parellele.
Lo spazio è quindi un *insieme* i cui elementi sono detti *punti* e nel quale sono dati alcuni sottoinsiemi (rette, piani, segmenti...) verificanti questi 5 gruppi di assiomi. A priori ci possono essere varie geometrie euclidee: Hilbert dimostra che due geometrie euclidee differenti sono di fatto equivalenti e possono essere assimilate. Esiste quindi una sola geometria euclidea che è proprio quella che era nella testa di Euclide verso il 300 A.C. **Fine introduzione.**

Supponiamo di avere uno spazio euclideo. Esiste, grazie agli assiomi, un'unità di misura ed ha quindi senso parlare di segmenti di lunghezza 1. Se pensiamo allo spazio euclideo come allo spazio fisico circostante, esiste un'unità di misura (il metro depositato a Parigi oppure le sue declinazioni più avanzate che si adottano recentemente).

Sia $\mathcal{V}^3_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei segmenti orientati centrati in O. Scriveremo brevemente $\mathcal{V}_O$. Se $\underline{v}$ è un vettore di $\mathcal{V}_O$, e cioè un segmento orientato, denotiamo con $||\underline{v}||$ la sua lunghezza in quanto segmento.

Prodotto scalare in $\mathcal{V}_O$.

Il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in \mathcal{V}_O$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}||\, ||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}\,,$$

dove prendiamo l'angolo convesso fra i due vettori (quindi $\widehat{\underline{v}\underline{w}} \in [0, \pi]$). Si noti che allora

$$||\underline{v}|| = \sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >}$$

e che

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|}$$

se $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0}$.
In particolare

$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow < \underline{v}, \underline{w} >= 0 \,.$$

Il prodotto scalare deve essere pensato come ad un'applicazione

$$\mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_0 \to \mathbb{R}$$

e come tale gode delle seguenti proprietà:
(i) è simmetrico: $< \underline{v}, \underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} > \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{V}_O$;
(ii) è lineare in entrambi gli argomenti (*bilineare*):

$$< \lambda\underline{v} + \lambda'\underline{v}', \underline{w} >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > +\lambda' < \underline{v}', \underline{w} >$$

$$< \underline{v}, \lambda\underline{w} + \lambda'\underline{w}' >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > +\lambda' < \underline{v}, \underline{w}' >$$

per ogni $\underline{v}, \underline{v}', \underline{w}, \underline{w}' \in \mathcal{V}_O$ e per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$
(iii) $< \underline{v}, \underline{v} > \geq \ 0 \ \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ ed è $= 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$
L'ultima properietà si enuncia dicendo che $< , >$ è **definito positivo**.

La dimostrazione di (i) e (iii) è ovvia. Omettiamo la dimostrazione di (ii).

Notiamo anche che vale in maniera ovvia [1]

$$| < \underline{v}, \underline{w} > | \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$$

e l'uguaglianza vale se e solo se i vettori sono proporzionali e cioè linearmente dipendenti.

La coppia $(\mathcal{V}_O, < , >)$, e cioè $\mathcal{V}_O$ corredato con il prodotto scalare $< , >$, è un **esempio** di **spazio vettoriale metrico**.
Nel proseguo del corso utilizzeremo queste 3 proprietà per **definire** un prodotto scalare in un qualsiasi spazio vettoriale V e dotare quindi tale spazio vettoriale V di una struttura di spazio vettoriale metrico.

Prodotto scalare in coordinate.
Una base è detta *ortonormale* se i vettori della base hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali. Fissiamo una tale base. Denotiamo tale base con $\mathcal{B} := \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate.

Possiamo verificare facilmente che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

$$< \underline{v}, \underline{w} >= xx' + yy' + zz' \,. \tag{1}$$

Questa è l'espressione del prodotto scalare nelle coordinate associate alla base ortonormale. Per dimostrare questa formula basterà scrivere

$$< \underline{v}, \underline{w} >=< x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}, x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k} >,$$

applicare ripetutamente la bilinearità ed utilizzare la traduzione in formule della condizione di ortonormalità per la base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, e cioè :

$$\begin{aligned} &< \underline{i}, \underline{j} >= 0 \,, \quad < \underline{i}, \underline{k} >= 0 \,, \quad < \underline{j}, \underline{k} >= 0 \\ &< \underline{i}, \underline{i} >= 1 \,, \quad < \underline{j}, \underline{j} >= 1 \,, \quad < \underline{k}, \underline{k} >= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

[1] $|\cos\theta| \leq 1 \,, \quad \forall\theta$

In particolare, dalla (1) segue che

$$||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

e

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{(xx' + yy' + zz')}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}$$

Quindi, se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

(3) $$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0\,.$$

Osserviamo che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ allora

$$x = <\underline{v}, \underline{i}>\,, \quad y = <\underline{v}, \underline{j}>\,, \quad z = <\underline{v}, \underline{k}>\ .$$

Questa formula si ottiene prendendo il prodotto scalare di $\underline{v}$, e cioè di $x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$, con i tre vettori della base ortonormale ed utilizzando (2); per ogni vettore $\underline{v}$ vale quindi l'identità

(4) $$\underline{v} = <\underline{v}, \underline{i}>\underline{i} + <\underline{v}, \underline{j}>\underline{j} + <\underline{v}, \underline{k}>\underline{k}$$

Un vettore di lunghezza unitaria è detto un *versore*: se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}/\|\underline{v}\|$ è un versore. In particolare se $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ allora r è generata da due versori

$$\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \quad \text{e} \quad -\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$$

Notiamo che se $\underline{r}$ è un *versore* allora

$$\begin{aligned} \underline{r} &= <\underline{r}, \underline{i}>\underline{i} + <\underline{r}, \underline{j}>\underline{j} + <\underline{r}, \underline{k}>\underline{k} \\ &= (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{i}})\underline{i} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{j}})\underline{j} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{k}})\underline{k} \end{aligned}$$

e scopriamo quindi che le coordinate di un *versore* non sono altro che i coseni degli angoli che tale versore forma con i vettori della base. Per questa ragione si dà il nome di *coseni direttori* alle coordinate di un versore.

È chiaro che se fissiamo una qualsiasi base, non necessariamente ortonormale, allora possiamo ancora scrivere l'espressione in coordinate del prodotto scalare, ma l'espressione sarà più complicata di quella trovata in (1). Più precisamente: sia $\mathcal{C} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una qualsiasi base con coordinate (x_1, x_2, x_3); consideriamo $\underline{v} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3$ e $\underline{w} = y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2 + y_3\underline{v}_3$; se definiamo

$$A_{\mathcal{C}} := (a_{ij})$$

con

$$a_{ij} = <\underline{v}_j, \underline{v}_i> \equiv <\underline{v}_i, \underline{v}_j>$$

allora non è difficile dimostrare, utilizzando la definizione di $A_{\mathcal{C}}$ e la bilinearità, che

(5) $$<\underline{v}, \underline{w}> = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \equiv \underline{y}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{x}$$

Vi invito calorosamente a fornire i dettagli. Se $\mathcal{C}$ è ortonormale allora, dalla definizione, segue che $A_{\mathcal{C}} = I_3$, la matrice identità 3×3, e troviamo

$$<\underline{v}, \underline{w}> = \underline{y}^T \cdot \underline{x}$$

che è precisamente (1).
Notare che $A_{\mathcal{C}}$ è una matrice **simmetrica** e che quindi si ha anche

$$< \underline{v}, \underline{w} >= \underline{x}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{y}.$$

Infatti $\underline{y}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{x}$ in (5) è un numero reale, quindi una matrice 1×1; tale matrice 1×1 coincide quindi con la sua trasposta ed allora si ha, da regole ben note,

$$\underline{y}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{x} = (\underline{y}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{x})^T = \underline{x}^T \cdot A_{\mathcal{C}}^T \cdot ((\underline{y})^T)^T = \underline{x}^T \cdot A_{\mathcal{C}} \cdot \underline{y}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la simmetria di $A_{\mathcal{C}}$.

Preliminari al metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
In $\mathcal{V}_O^2$, siamo quindi nel piano, consideriamo una retta

$$r = \mathrm{Span}(\underline{w}) \leq \mathcal{V}_O^2$$

Proposizione 1. *Sia $\underline{v}$ un vettore non nullo di $\mathcal{V}_O^2$. Allora il vettore*

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w}$$

è un vettore in r tale che

$$\underline{v} - \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w} \ \perp \ \underline{w}$$

La Proposizione 1 si dimostra immediatamente; è chiaro che

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w} \in r = \mathrm{Span}(\underline{w})\,.$$

Inoltre è di immediata verifica che il prodotto scalare di

$$\underline{v} - \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w}$$

con $\underline{w}$ è uguale a zero. Infatti:

$$< \underline{w}, \underline{v} - \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} > - \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >} < \underline{w}, \underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} > - < \underline{v}, \underline{w} >= 0$$

dove abbiamo utilizzato la linearità del prodotto scalare nel secondo argomento e la sua simmetria.
Il vettore

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w}$$

rappresenta la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ sulla retta r; infatti

$$\frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w} = \frac{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{v}\underline{w}})}{\|\underline{w}\|^2}\|\underline{w}\| = (\|\underline{v}\| \cos(\widehat{\underline{v}\underline{w}}))\,\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}\,.$$

Fate ora una figura ed applicate il teorema dei seni.

Passiamo ora alla spazio $\mathcal{V}_O^3 \equiv \mathcal{V}_O$. Consideriamo un vettore non nullo $\underline{w}$ e la retta da lui generata

$$r = \mathrm{Span}(\underline{w}) \leq \mathcal{V}_O$$

L'insieme dei vettori ortogonali a tale retta è uguale a

$$\pi = \{\underline{v} \in \mathcal{V}_O \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{w} >= 0\},$$

sempre per linearità nel secondo argomento. Dalla linearità del prodotto scalare nel primo argomento scopriamo che π è un sottospazio; esso è un sottospazio proprio di

$\mathcal{V}_O$ perché $\underline{w} \notin \pi$; è subito visto che π è precisamente il piano vettoriale ortogonale alla retta r. Si ha quindi una decomposizione in somma diretta:

$$\mathcal{V}_O = \pi \oplus r\,.$$

Ogni vettore $\underline{v}$ dello spazio $\mathcal{V}_O$ si scrive in maniera unica come

$$\underline{v} = \underline{v}_\pi + \underline{v}_r \tag{6}$$

Fissiamo ora una base **ortogonale** di π, chiamiamola $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$. Allora

$$\{\underline{f}_1 := \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||}, \underline{f}_2 := \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||}, \underline{f}_3 := \frac{\underline{w}}{||\underline{w}||}\}$$

è una base ortonormale dello spazio, con i primi due vettori in π ed il terzo vettore in r. Se $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ allora sappiamo, si veda la (4) (che è valida per qualsiasi base ortonormale), che

$$\underline{v} =< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2 + < \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3$$

Riscriviamo questa formula come

$$\underline{v} = \Big(< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2\Big) + \Big(< \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3\Big)$$

e quindi si ha $\underline{v}_\pi = \Big(< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2\Big)$ e $\underline{v}_r = \Big(< \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3\Big)$.
Il vettore

$$< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2$$

è per definizione la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ sul piano π (già sappiamo che

$$< \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3$$

è la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ sulla retta r). Rivedete le figure fatte in classe.
Conclusione: ritornando a $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ vediamo che vale la seguente

Proposizione 2. Se $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ e $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è una base **ortogonale** di π allora

$$\underline{v} - < \underline{v}, \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||} > \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||} - < \underline{v}, \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||} > \frac{\underline{u}_2}{||\underline{u}_2||} \tag{7}$$

è un vettore ortogonale a π.
Possiamo riscrivere questo vettore come

$$\underline{v} - \frac{< \underline{v}, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >} \underline{u}_1 - \frac{< \underline{v}, \underline{u}_2 >}{< \underline{u}_2, \underline{u}_2 >} \underline{u}_2 \tag{8}$$

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \underline{w}_1 \\ \underline{u}_2 &= \underline{w}_2 - \frac{< \underline{w}_2, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_3 &= \underline{w}_3 - \frac{< \underline{w}_3, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >} \underline{u}_1 - \frac{< \underline{w}_3, \underline{u}_2 >}{< \underline{u}_2, \underline{u}_2 >} \underline{u}_2 \end{aligned}$$

Si dimostra in maniera diretta che i tre vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono una base *ortogonale* ed hanno l'ulteriore proprietà che $\mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) =$

$\mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \mathcal{V}_O = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$.
Al di là del calcolo esplicito che mette in luce l'ortogonalità di questi tre vettori notiamo che:

- $\underline{u}_2$ è uguale a $\underline{w}_2$ meno la proiezione ortogonale di $\underline{w}_2$ su $\underline{w}_1$ [2]
- $\underline{u}_3$ è uguale a $\underline{w}_3$ meno la proiezione ortogonale di $\underline{w}_3$ sul piano $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ [3]

Fate figure !

Una volta trovata l'ortogonalizzata di Gram-Schmidt possiamo normalizzare i 3 vettori, dividendoli per la loro norma, ed ottenere una base ortonormale.

Condizione di ortogonalità fra retta e piano.
Sia π un piano di $\mathcal{V}_O$ di equazione cartesiana $ax+by+cz=0$ nelle coordinate (x,y,z) associate alla base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Un generatore per la retta ortogonale a π è dato da $\underline{n} := (a,b,c)$. Infatti: $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \pi \Leftrightarrow av_x + bv_y + cv_z = 0 \Leftrightarrow\ < \underline{n}, \underline{v} >= 0 \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{n}$. Quindi (l,m,n) è ortogonale a $ax+by+cz=0$ se e solo se (l,m,n) è proporzionale a (a,b,c).

Equazioni cartesiane. Il ragionamento fatto dell'ultimo paragrafo dimostra che l'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}(\ell,m,n)$ è $\ell x+my+nz=0$. Le equazioni cartesiane della retta ortogonale ad un piano π dato tramite una sua base, $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$, con $\underline{v}$ di coordinate (v_1, v_2, v_3) e $\underline{w}$ di coordinate (w_1, w_2, w_3), si ottengono immediatamente dal seguente ragionamento:
un vettore di coordinate (x,y,z) è ortogonale al piano se e solo se, per definizione, è ortogonale ad ogni vettore del piano; ma ciò accade se e solo se (per linearità) esso è ortogonale ai vettori di una base del piano e quindi se e solo se

$$\begin{cases} xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \\ xw_1 + yw_2 + zw_3 = 0 \end{cases}$$

Queste sono equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

[2] e questo $\underline{u}_2$ è ortogonale a $\underline{w}_1$ per la Proposizione 1
[3] e questo $\underline{u}_3$ è ortogonale a $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ per la Proposizione 2