Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2013-14
Prof. P. Piazza
Note di Geometria (vettoriale) Euclidea

Fissiamo un'unità di misura nello spazio euclideo. Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori centrati in O. Se $\underline{v}$ è un vettore di $\mathcal{V}_O$, e cioè un segmento orientato, denotiamo con $||\underline{v}||$ la sua lunghezza in quanto segmento.

Prodotto scalare.
Il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in \mathcal{V}_0$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}|| \, ||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} \,,$$

dove prendiamo l'angolo convesso fra i due vettori (quindi $\widehat{\underline{v}\underline{w}} \in [0, \pi]$). Si noti che allora

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >$$

e che

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{\sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \sqrt{< \underline{w}, \underline{w} >}}$$

se $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0}$.
In particolare

$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow < \underline{v}, \underline{w} >= 0 \,.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:
(i) è simmetrico: $< \underline{v}, \underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} > \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{V}_O$;
(ii) è lineare in entrambi gli argomenti (*bilineare*):

$$< \lambda \underline{v} + \lambda' \underline{v}', \underline{w} >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > + \lambda' < \underline{v}', \underline{w} >$$

$$< \underline{v}, \lambda \underline{w} + \lambda' \underline{w}' >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > + \lambda' < \underline{v}, \underline{w}' >$$

per ogni $\underline{v}, \underline{v}', \underline{w}, \underline{w}' \in \mathcal{V}_O$ e per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$
(iii) $< \underline{v}, \underline{v} > \geq 0 \ \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ ed è $= 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$
La dimostrazione di (i) e (iii) è ovvia. Omettiamo la dimostrazione di (ii).

Basi ortonormali. Prodotto scalare in coordinate.
Una base è detta *ortonormale* se i vettori della base hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali. Fissiamo una tale base. Denotiamo tale base con $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate.

Possiamo verificare facilmente che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

$$< \underline{v}, \underline{w} >= xx' + yy' + zz' \,. \tag{1}$$

Per dimostrare questa formula basterà applicare ripetutamente la bilinearità ed utilizzare la traduzione in formule della condizione di ortonormalità per la base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, e cioè :

$$\begin{aligned} &< \underline{i}, \underline{j} >= 0 \,, \quad < \underline{i}, \underline{k} >= 0 \,, \quad < \underline{j}, \underline{k} >= 0 \\ &< \underline{i}, \underline{i} >= 1 \,, \quad < \underline{j}, \underline{j} >= 1 \,, \quad < \underline{k}, \underline{k} >= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

In particolare, dalla (1) segue che $||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{(xx' + yy' + zz')}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}$$

Quindi, se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0 \,. \tag{3}$$

Un vettore di lunghezza unitaria è detto un *versore*: se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}/\|\underline{v}\|$ è un versore. In particolare se $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ allora r è generata da due versori

$$\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}\,, \quad \text{e} \quad -\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$$

Una retta *orientata* r è una retta insieme alla scelta di un verso su r, o, equivalentemente, di uno dei due versori. È ovvio che una retta ha due orientazioni.

Osserviamo che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ allora

$$x =< \underline{v}, \underline{i} >\,, \quad y =< \underline{v}, \underline{j} >\,, \quad z =< \underline{v}, \underline{k} > \;.$$

Questa formula si ottiene prendendo il prodotto scalare di $\underline{v}$ con i tre vettori della base ortonormale ed utilizzando (2); per ogni vettore $\underline{v}$ vale quindi l'identità

$$\underline{v} =< \underline{v}, \underline{i} > \underline{i}+ < \underline{v}, \underline{j} > \underline{j}+ < \underline{v}, \underline{k} > \underline{k} \tag{4}$$

In particolare, se r è una retta orientata e $\underline{r}$ un *versore* che la definisce, allora

$$\begin{aligned} \underline{r} &=< \underline{r}, \underline{i} > \underline{i}+ < \underline{r}, \underline{j} > \underline{j}+ < \underline{r}, \underline{k} > \underline{k} \\ &= (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{i}})\underline{i} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{j}})\underline{j} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{k}})\underline{k} \end{aligned}$$

e scopriamo quindi che le coordinate del *versore* che definisce una retta orientata non sono altro che i coseni degli angoli che tale versore forma con i vettori della base. Per questa ragione si dà il nome di *coseni direttori* alle coordinate di un versore di una retta orientata.

Proiezione ortogonale su una retta e su un piano.
Sia $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ una retta vettoriale, e cioè un sottospazio di dimensione 1 di $\mathcal{V}_O$. L'ortogonale di r è il sottoinsieme

$$(r)^{\perp} = \{\underline{v} \in \mathcal{V}_O \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{u} >= 0 \ \forall \underline{u} \in r\}$$

In parole, $(r)^{\perp}$ *è l'insieme dei vettori di* $\mathcal{V}_O$ *che sono ortogonali ad ogni vettore di* r. Dalla linearità del prodotto scalare nel secondo argomento, tenendo conto che $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$, si ha

$$(r)^{\perp} = \{\underline{v} \in \mathcal{V}_O \text{ tali che } < \underline{v}, \underline{w} >= 0\}\,.$$

Dalla bilinearità del prodotto scalare nel primo argomento scopriamo che $(r)^{\perp}$ è un sottospazio. È chiaro che questo sottospazio altri non è che il piano vettoriale ortogonale a r. Sia quindi $(r)^{\perp}$ il piano ortogonale a r. È ovvio che si ha una decomposizione in somma diretta:

$$\mathcal{V}_O = r \oplus (r)^{\perp}\,.$$

Ogni vettore $\underline{v}$ dello spazio $\mathcal{V}_O$ si scrive in maniera unica come

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_{(r)^{\perp}} \tag{5}$$

Rimane quindi definita l'applicazione lineare P_r = proiezione sulla retta r (con $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$) parallelamente al piano $(r)^{\perp}$:

$$P_r(\underline{v}) := \underline{v}_r$$

Chiamiamo questa proiezione *la proiezione ortogonale sulla retta* r. Dato un vettore $\underline{v}$, il vettore $P_r(\underline{v})$ è detto *la proiezione ortogonale di* $\underline{v}$ *sulla retta* r. Analogamente abbiamo l'applicazione lineare $P_{(r)^{\perp}}$:

$$P_{(r)^{\perp}}(\underline{v}) := \underline{v}_{(r)^{\perp}}$$

che chiamiamo semplicemente la *proiezione ortogonale sul piano* $(r)^{\perp}$.
Dalla (5) segue che

$$P_r + P_{(r)^{\perp}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O} .$$

È ovvio che

$$(\underline{v} - P_r(\underline{v})) \perp \underline{w} \quad (r = \mathrm{Span}(\underline{w})) \tag{6}$$

perché per costruzione $(\underline{v} - P_r\underline{v}) \in (r)^{\perp}$.

Denotiamo con π il piano ortogonale ad r:

$$\pi := (r)^{\perp} ,$$

e osserviamo che $\pi^{\perp} = ((r)^{\perp})^{\perp} = r$.

Supponiamo che $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, con $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$. È ovvio che

$$(\underline{v} - \underline{v}_{\pi}) \perp \underline{u} , \quad \forall \underline{u} \in \pi$$

perché per costruzione $(\underline{v} - \underline{v}_{\pi}) \in r = (\pi)^{\perp}$. In particolare,

$$(\underline{v} - \underline{v}_{\pi}) \perp \underline{u}_1 , \quad (\underline{v} - \underline{v}_{\pi}) \perp \underline{u}_2 \tag{7}$$

Con le precedenti notazioni si ha:

Proposizione 2. *Sia r una retta e π il piano ortogonale a tale retta. La proiezione ortogonale sulla retta r è data da:*

$$P_r(\underline{v}) = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w} , \quad \textit{con} \quad r = \mathrm{Span}(\underline{w}) \tag{8}$$

Il vettore $\frac{<\underline{v},\underline{w}>}{<\underline{w},\underline{w}>}\underline{w}$ è anche detto la componente ortogonale di $\underline{v}$ secondo la retta $\mathrm{Span}(\underline{w})$.
La proiezione ortogonale P_{π} su π è data da

$$P_{\pi}\underline{v} = \frac{< \underline{v}, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >}\underline{u}_1 + \frac{< \underline{v}, \underline{u}_2 >}{< \underline{u}_2, \underline{u}_2 >}\underline{u}_2 \tag{9}$$

se $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ e $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$.

Dimostrazione. Poniamo $\underline{u}_3 := \underline{w}$, con $\underline{w}$ un generatore di r. La base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è ortogonale. La base

$$\{\underline{f}_1 := \frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \underline{f}_2 := \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \underline{f}_3 := \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}$$

è quindi *ortonormale*. Utilizzando l'analoga della (4) per questa base ortonormale scopriamo che ogni vettore $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ si scrive come

$$\underline{v} = \Big(< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2\Big) + \Big(< \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3\Big)$$

con il primo addendo in π ed il secondo addendo in r. Ma allora per definizione

$$P_r(\underline{v}) =< \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3$$

$$P_{\pi}(\underline{v}) = (< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2)$$

ed utilizzando la definizione di $\underline{f}_3$ e di $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ segue subito la tesi.

Simmetrie ortogonali. Sia $\mathcal{V}_O = r \oplus (r)^{\perp} \equiv r \oplus \pi$, con $\pi = r^{\perp}$. Possiamo anche definire la simmetria ortogonale S_{π} rispetto a π e la simmetria ortogonale, S_r, rispetto a r :

$$\text{se } \underline{v} \in \mathcal{V}_O, \underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_{\pi} \text{ allora } S_{\pi}(\underline{v}) := -\underline{v}_r + \underline{v}_{\pi} \quad \text{e} \quad S_r(\underline{v}) = \underline{v}_r - \underline{v}_{\pi}$$

È chiaro dalla definizione che

$$S_\pi = P_\pi - P_r = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O} - 2P_r$$

(infatti da $\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\pi$ e dalla definizione segue la prima uguaglianza, mentre la seconda è conseguenza dell'ovvia identità $-\underline{v}_r + \underline{v}_\pi = \underline{v} - 2\underline{v}_r$). Analogamente

$$S_r = P_r - P_\pi = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O} - 2P_\pi$$

Fate una figura con un piano e con la retta ortogonale. Disegnate le 2 proiezioni e le due simmetrie e convincetevi graficamente di questi enunciati.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con

$$\underline{u}_1 = \underline{w}_1$$
$$\underline{u}_2 = \underline{w}_2 - \frac{<\underline{w}_2, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1$$
$$\underline{u}_3 = \underline{w}_3 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_2>}{<\underline{u}_2, \underline{u}_2>}\underline{u}_2$$

Vi faccio notare che per la Proposizione 1 il vettore $\underline{u}_2$ altri non è che $\underline{w}_2 - P_r(\underline{w}_2)$ con $r = \mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$ ed è quindi ortogonale a $\underline{w}_1 \equiv \underline{u}_1$ per la (6).
Notiamo inoltre che per la Proposizione 2 il vettore $\underline{u}_3$ altri non è che $\underline{w}_3 - P_\pi(\underline{w}_3)$ con $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$; questa differenza è ortogonale sia a $\underline{u}_1$ che a $\underline{u}_2$ per la (7).
Tutto questo dimostra che i tre vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono una base *ortogonale* ed hanno l'ulteriore proprietà che $\mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \mathcal{V}_O = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$. Una base *ortonormalizzata* è

$$\{\frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}\,.$$

Condizione di ortogonalità fra retta e piano.
Sia π un piano di $\mathcal{V}_O$ di equazione cartesiana $ax+by+cz=0$ nelle coordinate (x, y, z) associate alla base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Un generatore per la retta ortogonale a π è dato da $\underline{n} := (a, b, c)$. Infatti: $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \pi \Leftrightarrow av_x + bv_y + cv_z = 0 \Leftrightarrow\ <\underline{n}, \underline{v}>= 0 \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{n}$. Quindi (l, m, n) è ortogonale a $ax + by + cz = 0$ se e solo se (l, m, n) è proporzionale a (a, b, c).

Equazioni cartesiane. Il ragionamento fatto dell'ultimo paragrafo dimostra che l'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}(\ell, m, n)$ è $\ell x+my+nz = 0$.
Le equazioni cartesiane della retta ortogonale ad un piano π dato tramite una sua base, $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$, con $\underline{v}$ di coordinate (v_1, v_2, v_3) e $\underline{w}$ di coordinate (w_1, w_2, w_3), si ottengono immediatamente dal seguente ragionamento:
un vettore di coordinate (x, y, z) è ortogonale al piano se e solo se, per definizione, è ortogonale ad ogni vettore del piano; ma ciò accade se e solo se (per linearità) esso è ortogonale ai vettori di una base del piano e quindi se e solo se

$$\begin{cases} xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \\ xw_1 + yw_2 + zw_3 = 0 \end{cases}$$

Queste sono equazioni cartesiane della retta ortogonale al piano $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

Orientazione di $\mathcal{V}_O$.

Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{V}_O$ sono dette equiorientate se il determinante della matrice del cambiamento di base è positivo. In tal caso diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono la stessa orientazione in $\mathcal{V}_O$; diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono orientazioni opposte di $\mathcal{V}_O$ se il determinante della matrice del cambiamento di base è negativo. Un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ è quindi fissata, per definizione, dalla scelta di una base e, di conseguenza, di tutte le basi equiorientate con tale base. È ovvio che $\mathcal{V}_O$ ha due orientazioni.

Cambiamenti di base ortonormali.
Sia $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O$. Sia $\mathcal{B}' := \{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_3\}$ una seconda base. Sia B la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.
Proposizione 3. La base $\mathcal{B}'$ è ortonormale se e solo se $B^T B = I_3$
Dimostrazione. Dire che $\mathcal{B}'$ è ortonormale vuol dire che

$$< \underline{v}'_i, \underline{v}'_j >= 0 \quad \text{se} \quad i \neq j\,; \qquad < \underline{v}'_i, \underline{v}'_i >= 1\,. \tag{10}$$

Se in queste relazioni sostituiamo le espressioni di $\underline{v}'_j$ in funzione dei vettori di $\mathcal{B}$ e della matrice B scopriamo che le (10) altro non sono che le relazioni che impongono l'uguaglianza $B^T B = I_3$. La Proposizione è dimostrata.

Definizione. Sia $O(n) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, A^T A = I_n\}$. Le matrici di $O(n)$ sono dette *ortogonali*. Notiamo che $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,|\, A^{-1} = A^T\}$, infatti $\det A = \pm 1$ (dato che $\det A^2 = 1$) da cui $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$; quindi le matrici ortogonali sono invertibili. Inoltre essendo per definizione $A^T A = I_n$ si deve avere, moltiplicando a destra ambo i membri per A^{-1}, $A^T = A^{-1}$ che è quello che avevamo enunciato.
Proposizione 4. $O(n)$ con il prodotto righe per colonne è un gruppo, detto *gruppo ortogonale.*
Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che il prodotto righe per colonne di due matrici ortogonali è ancora ortogonale e che l'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale. Se $A, B \in O(n)$ allora $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I_n B = B^T B = I_n$; quindi $AB \in O(n)$ come volevasi. Inoltre, se $A \in O(n)$ allora $A^T = A^{-1}$ e quindi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} (= A)$; dato che $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ abbiamo in definitiva $(A^{-1})^T = (A^{-1})^{-1}$ e cioè $A^{-1} \in O(n)$ come dovevamo dimostrare.

Il sottoinsieme $SO(n) = \{A \in O(n) \,|\, \det A = 1\}$ è anche un gruppo (il prodotto di due elementi in $SO(n)$ è ancora in $SO(n)$ e l'inverso di un elemento in $SO(n)$ è ancora in $SO(n)$) detto *gruppo ortogonale speciale.* Notiamo che gli elementi di $SO(3)$ possono essere pensati come le matrici di cambiamento di base, da una base ortonormale a una base ortonormale *equiorientata.*

Esempio. Non è difficile dimostrare (potete farlo per esercizio) che

$$O(2) = \{\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

$$SO(2) = \{\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Se identifichiamo $\mathcal{V}_O^2$ con una base ortonormale a $\mathbb{R}^2$ con la base canonica allora capiamo che, ad esempio, la matrice $\begin{vmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{vmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base ottenura ruotando in senso antiorario la base canonica di $\pi/4$.

Isometrie. Sia $\mathcal{V}_O \equiv \mathcal{V}_O^3$. Un'applicazione lineare $T : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ è un'isometria se conserva le lunghezze dei vettori; in formule

$$||T\underline{v}|| = ||\underline{v}|| \,, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$$

Un'isometria è necessariamente iniettiva perché ha nucleo banale (se $T\underline{v} = \underline{0}$ allora $||T\underline{v}|| = 0$ ma allora, essendo T un'isometria, $||\underline{v}|| = 0$ e quindi $\underline{v} = \underline{0}$). Ne segue che T è biettiva. Inoltre

$$< T\underline{v}, T\underline{v}' >=< \underline{v}, \underline{v}' > \,, \quad \forall \underline{v}.\underline{v}' \in \mathcal{V}_O \,. \tag{11}$$

In parole, T conserva il prodotto scalare, da cui segue che T conserva anche gli angoli (oltre alle lunghezze). Per dimostrare la formula (11) osserviamo che dalla bilinearità del prodotto scalare si ha la seguente identità (anche detta identità di polarizzazione)

$$< \underline{u}, \underline{w} >= \frac{1}{4}\left[||\underline{u}+\underline{w}||^2 - ||\underline{u}-\underline{w}||^2\right]$$

(basta ricordare che $||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >$, sviluppare quello che appare a secondo membro e fare i calcoli). La (11) segue da quest'identità, con $\underline{u} = T\underline{v}$, $\underline{w} = T\underline{v}'$; dovrete ovviamente utilizzare la linearità di T ed il fatto che è un'isometria.

Si potrebbe dimostrare, ma non lo faremo, che un'applicazione $T : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ che soddisfi $||T\underline{v}|| = ||\underline{v}|| \;\; \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ e tale che $T(\underline{0}) = \underline{0}$ è necessariamente lineare.

Esempio. *Le simmetrie ortogonali sono isometrie.* Infatti:

$$||S_\pi \underline{v}||^2 = ||-\underline{v}_r + \underline{v}_\pi||^2 =< \underline{v}_r, \underline{v}_r > -2 < \underline{v}_r, \underline{v}_\pi > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi >$$

Ma $r \perp \pi$ per ipotesi, quindi $< \underline{v}_r, \underline{v}_\pi >= 0$ da cui

$$||S_\pi \underline{v}||^2 =< \underline{v}_r, \underline{v}_r > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi > \,.$$

Calcoliamo ora $||\underline{v}||^2$: si ha

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >=< \underline{v}_r, \underline{v}_r > +2 < \underline{v}_r, \underline{v}_\pi > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi >=< \underline{v}_r, \underline{v}_r > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi > \,.$$

Quindi $||S_\pi \underline{v}||^2 = ||\underline{v}||^2$, che è quello che si doveva verificare.

Esempio. Le rotazioni attorno all'origine nel piano vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ sono applicazioni lineari (ragionate direttamente sulla regola del parallelogramma) e sono chiaramente isometrie. Analogamente, le rotazioni attorno ad un asse (attorno, quindi, ad una retta vettoriale) in $\mathcal{V}_O^3$ sono isometrie.

Osservazione. Se T è un'isometria e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base ortonormale, allora è chiaro che $\mathcal{B}$ viene trasformata in una base ortonormale $\mathcal{B}'$ da T (infatti T è una biezione e, inoltre, T conserva le lunghezze e gli angoli). La matrice associata a T con scelta di base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{B}$ in arrivo (stessa base !) è quindi una matrice *ortogonale* [1].

Viceversa, supponiamo che T sia un endomorfismo e che la sua matrice associata ad una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sia una matrice ortogonale; allora, ragionando come nella Proposizione 3, T porta la base fissata in una base ortonormale. Ma allora da una parte $< \underline{v}, \underline{v}' >= x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$ e dall'altra, usando la linearità di T, la bilinearità di $<\,,\,>$ ed un semplice calcolo scopriamo che $< T\underline{v}, T\underline{v}' >$

[1] perché questa è la matrice che ha come colonne le coordinate di $T\underline{v}_j$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; ha quindi come colonne le coordinate di una base ortonormale $\mathcal{B}'$ in una base ortonormale $\mathcal{B}$

è uguale a

$$\begin{aligned} x_1x_1' < T\underline{v}_1, T\underline{v}_1 > +x_2x_2' < T\underline{v}_2, T\underline{v}_2 > +x_3x_3' < T\underline{v}_3, T\underline{v}_3 > + \\ x_1x_2' < T\underline{v}_1, T\underline{v}_2 > +x_2x_1' < T\underline{v}_2, T\underline{v}_1 > + \\ x_1x_3' < T\underline{v}_1, T\underline{v}_3 > +x_3x_1' < T\underline{v}_3, T\underline{v}_1 > + \\ x_2x_3' < T\underline{v}_2, T\underline{v}_3 > +x_3x_2' < T\underline{v}_3, T\underline{v}_2 > \end{aligned}$$

e dato che $\{T\underline{v}_1, T\underline{v}_2, T\underline{v}_3\}$ è una base ortonormale, vediamo che questa espressione è proprio $x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$. Quindi $< T\underline{v}, T\underline{v}' >=< \underline{v}, \underline{v}' >$ il che vuol dire che T è un'isometria.

Osservazione. Possiamo quindi pensare alle matrici di $O(2)$ e $O(3)$ in due modi: come matrici di cambiamento di base, da base ortonormale $\mathcal{B}$ a base ortonormale $\mathcal{B}'$; oppure come matrici associate ad isometrie rispetto ad una fissata base ortormale $\mathcal{B}$.

Ad esempio la matrice $\begin{vmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{vmatrix}$ è

- la matrice del cambiamento di base, da una base ortonormale di $\mathcal{V}_O^2$, che identifichiamo alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, alla base di $\mathcal{V}_O^2$ data, nell'identificazione fra $\mathcal{V}_O^2$ a $\mathbb{R}^2$, dalla coppia di vettori

$$\begin{vmatrix} \cos\pi/4 \\ \sin\pi/4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\sin\pi/4 \\ \cos\pi/4 \end{vmatrix}$$

  (questa è la base ottenuta ruotando in senso antiorario in $\mathbb{R}^2$ la base canonica di un angolo di $\pi/4$).
- la matrice associata nella base ortonormale fissata [2] alla rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario; equivalentemente, facendo uso dell'identificazione fra $\mathcal{V}_O^2$ con la base ortonormale fissata e $\mathbb{R}^2$ con la base canonica, all'applicazione $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario.

Prodotto vettoriale. Fissiamo un'orientazione in $\mathcal{V}_O$, ad esempio tramite la scelta di una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: rimane allora definito un prodotto fra vettori

$$\mathcal{V}_O \times \mathcal{V}_O \ni (\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} \in \mathcal{V}_O$$

che viene chiamato *prodotto vettoriale* (e viene anche denotato con $\times$). Per definizione $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è il vettore di $\mathcal{V}_O$ univocamente caaratterizzato dalle tre seguenti proprietà:

(i) la lunghezza del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è uguale a $||\underline{v}||||\underline{w}|| \sin \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ che è anche l'area del parallelogramma definito da $\underline{v}, \underline{w}$. Notiamo che $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0}$ se i due vettori sono paralleli oppure se uno di essi è il vettore nullo.

(ii) se i due vettori sono non-nulli e *non* sono paralleli, allora la direzione del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quella ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

(iii) se i due vettori sono non-nulli e *non* sono paralleli, allora il verso del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quello per cui la base $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ è equiorientata alla base che definisce l'orientazione di $\mathcal{V}_O$.

In Fisica si usa fissare un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ tramite la mano sinistra o la mano destra facendo corrispondere $\underline{i}$ al dito medio, $\underline{j}$ all'indice ,$\underline{k}$ al pollice. Le due mani definiscono effettivamente le due orientazioni di $\mathcal{V}_O$ dato che hanno gli ultimi due vettori della base coincidenti ma il primo vettore, invece, con verso opposto. Se fissiamo ad esempio l'orientazione della mano sinistra allora il verso del prodotto

[2] quindi base partenza = base arrivo = base ortonormale fissata

vettoriale è quello del pollice se facciamo coincidere $\underline{v}$ al dito medio e $\underline{w}$ al dito indice (ovviamente della mano sinistra) .

Proposizione 5. Il prodotto vettoriale gode delle seguenti propietà:

- $\underline{v} \wedge \underline{w} = -\underline{w} \wedge \underline{v}$
- $(\lambda \underline{v}) \wedge \underline{w} = \lambda(\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{v} \wedge (\lambda \underline{w})$
- $(\underline{v} + \underline{v}') \wedge \underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v}' \wedge \underline{w}$
- $\underline{v} \wedge (\underline{w} + \underline{w}') = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{w}$
- se $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ e $\underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$ allora
$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & v_1 & w_1 \\ \underline{j} & v_2 & w_2 \\ \underline{k} & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$
(a destra sviluppiamo formalmente con Laplace secondo la prima colonna).

Dimostrazione. Il primo punto (antisimmetria) si ottiene ragionando sulle orientazioni. La dimostrazione della bilinearità è omessa. La formula per il prodotto vettoriale segue dall'antisimmetria e dalla bilinearità: si scrive $(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) \wedge (w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k})$, si sviluppa utilizzando la bilinearità e si utilizzano le seguenti relazioni, conseguenza diretta della definizione:
$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}\,, \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}\,, \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}\,.$$

È bene notare che il prodotto vettoriale *non* è associativo: ad esempio $\underline{i} \wedge (\underline{j} \wedge \underline{j})$ è uguale a $\underline{i} \wedge \underline{0}$ che è uguale a $\underline{0}$, mentre $(\underline{i} \wedge \underline{j}) \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$ come subito si verifica utilizzando l'ultima formula nella Proposizione 5.