Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2012-13
Prof. P. Piazza
Appunti di geometria (vettoriale) euclidea

Fissiamo un'unità di misura nello spazio euclideo. Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori centrati in O. Se $\underline{v}$ è un vettore di $\mathcal{V}_O$, e cioè un segmento orientato, denotiamo con $||\underline{v}||$ la sua lunghezza in quanto segmento. Nelle pagine che seguono ci occuperemo solo di questioni vettoriali: vi rimando al capitolo 12 di Abate-de Fabritiis per il passagio dalla geometria *vettoriale* euclidea alla geometria euclidea dello spazio [1].

Prodotto scalare.
Il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in \mathcal{V}_0$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}||\, ||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}\,,$$

dove prendiamo l'angolo convesso fra i due vettori (quindi $\widehat{\underline{v}\underline{w}} \in [0, \pi]$). Si noti che allora

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >$$

e che

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{\sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \sqrt{< \underline{w}, \underline{w} >}}$$

se $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0}$.
In particolare

$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow < \underline{v}, \underline{w} >= 0\,.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:
(i) è simmetrico: $< \underline{v}, \underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} > \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{V}_O$;
(ii) è lineare in entrambi gli argomenti (*bilineare*):

$$< \lambda\underline{v} + \lambda'\underline{v}', \underline{w} >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > +\lambda' < \underline{v}', \underline{w} >$$
$$< \underline{v}, \lambda\underline{w} + \lambda'\underline{w}' >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > +\lambda' < \underline{v}, \underline{w}' >$$

per ogni $\underline{v}, \underline{v}', \underline{w}, \underline{w}' \in \mathcal{V}_O$ e per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$
(iii) $< \underline{v}, \underline{v} > \geq 0 \ \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ ed è $= 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$
La dimostrazione di (i) e (iii) è ovvia. Omettiamo la dimostrazione di (ii).

Basi ortonormali. Prodotto scalare in coordinate.
Una base è detta *ortonormale* se i vettori della base hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali. Fissiamo una tale base. Denotiamo tale base con $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate.

Possiamo verificare facilmente che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

$$< \underline{v}, \underline{w} >= xx' + yy' + zz'\,. \tag{1}$$

Per dimostrare questa formula basterà applicare ripetutamente la bilinearità ed utilizzare la traduzione in formule della condizione di ortonormalità per la base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, e cioè :

$$\begin{aligned} &< \underline{i}, \underline{j} >= 0\,, \quad < \underline{i}, \underline{k} >= 0\,, \quad < \underline{j}, \underline{k} >= 0 \\ &< \underline{i}, \underline{i} >= 1\,, \quad < \underline{j}, \underline{j} >= 1\,, \quad < \underline{k}, \underline{k} >= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

[1] nella prima ci occupiamo di vettori e *sottospazi vettoriali* di $\mathcal{V}_O$, nella seconda ci occupiamo di punti, rette e piani dello spazio euclideo.

In particolare, dalla (1) segue che $||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e

$$\cos\widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{(xx' + yy' + zz')}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}$$

Quindi, se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0\,. \tag{3}$$

Un vettore di lunghezza unitaria è detto un *versore*: se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}/\|\underline{v}\|$ è un versore. In particolare se $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ allora r è generata da due versori

$$\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}\,, \quad \text{e} \quad -\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$$

Una retta *orientata* r è una retta insieme alla scelta di un verso su r, o, equivalentemente, di uno dei due versori. È ovvio che una retta ha due orientazioni.

Osserviamo che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ allora

$$x =< \underline{v}, \underline{i} >\,, \quad y =< \underline{v}, \underline{j} >\,, \quad z =< \underline{v}, \underline{k} >\ .$$

Questa formula si ottiene prendendo il prodotto scalare di $\underline{v}$ con i tre vettori della base ortonormale ed utilizzando (2); per ogni vettore $\underline{v}$ vale quindi l'identità

$$\underline{v} =< \underline{v}, \underline{i} > \underline{i} + < \underline{v}, \underline{j} > \underline{j} + < \underline{v}, \underline{k} > \underline{k} \tag{4}$$

In particolare, se r è una retta orientata e $\underline{r}$ un *versore* che la definisce, allora

$$\begin{aligned}\underline{r} &=< \underline{r}, \underline{i} > \underline{i} + < \underline{r}, \underline{j} > \underline{j} + < \underline{r}, \underline{k} > \underline{k}\\ &= (\cos\widehat{\underline{r}\,\underline{i}})\underline{i} + (\cos\widehat{\underline{r}\,\underline{j}})\underline{j} + (\cos\widehat{\underline{r}\,\underline{k}})\underline{k}\end{aligned}$$

e scopriamo quindi che le coordinate del *versore* che definisce una retta orientata non sono altro che i coseni degli angoli che tale versore forma con i vettori della base. Per questa ragione si dà il nome di *coseni direttori* alle coordinate di un versore di una retta orientata.

Proiezione ortogonale su una retta e su un piano.
Sia $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ una retta. Sia $(r)^\perp := \pi$ il piano ortogonale a questa retta. È ovvio che si ha una decomposizione in somma diretta:

$$\mathcal{V}_O = r \oplus (r)^\perp$$

Ogni vettore $\underline{v}$ dello spazio $\mathcal{V}_O$ si scrive in maniera unica come

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_{(r)^\perp} \tag{5}$$

Rimane quindi definita l'applicazione lineare P_r = proiezione sulla retta r (con $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$) parallelamente al piano $(r)^\perp$:

$$P_r(\underline{v}) := \underline{v}_r$$

Chiamiamo questa proiezione *la proiezione ortogonale sulla retta* r. Dato un vettore $\underline{v}$, il vettore $P_r(\underline{v})$ è detto *la proiezione ortogonale di* $\underline{v}$ *sulla retta* r. Analogamente abbiamo l'applicazione lineare $P_{(r)^\perp}$:

$$P_{(r)^\perp}(\underline{v}) := \underline{v}_{(r)^\perp}$$

che chiamiamo semplicemente la *proiezione ortogonale sul piano* $(r)^\perp$.
Dalla (5) segue che

$$P_r + P_{(r)^\perp} = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O}\,.$$

È ovvio che

$$(\underline{v} - P_r(\underline{v})) \perp \underline{w} \quad (r = \mathrm{Span}(\underline{w})) \tag{6}$$

perché per costruzione $(\underline{v} - P_r\underline{v}) \in (r)^\perp$.

Denotiamo con π il piano ortogonale ad r:

$$\pi := (r)^\perp .$$

Supponiamo che $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, con $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$. È ovvio che

$$(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}\,, \quad \forall \underline{u} \in \pi$$

perché per costruzione $(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \in r = (\pi)^\perp$. In particolare,

$$(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}_1\,, \quad (\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}_2 \tag{7}$$

Con le precedenti notazioni si ha:

Proposizione 2. *Sia r una retta e π il piano ortogonale a tale retta. La proiezione ortogonale sulla retta r è data da:*

$$P_r(\underline{v}) = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{< \underline{w}, \underline{w} >}\underline{w}\,, \quad \textit{con} \quad r = \mathrm{Span}(\underline{w}) \tag{8}$$

Il vettore $\frac{<\underline{v},\underline{w}>}{<\underline{w},\underline{w}>}\underline{w}$ è anche detto la componente ortogonale di $\underline{v}$ secondo la retta $\mathrm{Span}(\underline{w})$.

La proiezione ortogonale P_π su π è data da

$$P_\pi\underline{v} = \frac{< \underline{v}, \underline{u}_1 >}{< \underline{u}_1, \underline{u}_1 >}\underline{u}_1 + \frac{< \underline{v}, \underline{u}_2 >}{< \underline{u}_2, \underline{u}_2 >}\underline{u}_2 \tag{9}$$

se $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ *e* $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$.

Dimostrazione. Poniamo $\underline{u}_3 := \underline{w}$, con $\underline{w}$ un generatore di r. La base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è ortogonale. La base

$$\{\underline{f}_1 := \frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \underline{f}_2 := \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \underline{f}_3 := \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}$$

è quindi *ortonormale*. Utilizzando l'analoga della (4) per questa base ortonormale scopriamo che ogni vettore $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ si scrive come

$$\underline{v} = \Big(< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2\Big) + \Big(< \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3\Big)$$

con il primo addendo in π ed il secondo addendo in r. Ma allora per definizione

$$P_r(\underline{v}) = < \underline{v}, \underline{f}_3 > \underline{f}_3$$

$$P_\pi(\underline{v}) = (< \underline{v}, \underline{f}_1 > \underline{f}_1 + < \underline{v}, \underline{f}_2 > \underline{f}_2)$$

ed utilizzando la definizione di $\underline{f}_3$ e di $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ segue subito la tesi.

Simmetrie ortogonali. Sia $\mathcal{V}_O = r \oplus (r)^\perp \equiv r \oplus \pi$, con $\pi = r^\perp$. Possiamo anche definire la simmetria ortogonale S_π rispetto a π e la simmetria ortogonale, S_r, rispetto a r :

$$\text{se } \underline{v} \in \mathcal{V}_O, \underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\pi \text{ allora } S_\pi(\underline{v}) := -\underline{v}_r + \underline{v}_\pi \quad \text{e} \quad S_r(\underline{v}) = \underline{v}_r - \underline{v}_\pi$$

È chiaro dalla definizione che

$$S_\pi = P_\pi - P_r = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O} - 2P_r$$

(infatti da $\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\pi$ e dalla definizione segue la prima uguaglianza, mentre la seconda è conseguenza dell'ovvia identità $-\underline{v}_r + \underline{v}_\pi = \underline{v} - 2\underline{v}_r$). Analogamente

$$S_r = P_r - P_\pi = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O} - 2P_\pi$$

Fate una figura con un piano e con la retta ortogonale. Disegnate le 2 proiezioni e le due simmetrie e convincetevi graficamente di questi enunciati.

Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
Se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= \underline{w}_1 \\ \underline{u}_2 &= \underline{w}_2 - \frac{<\underline{w}_2, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 \\ \underline{u}_3 &= \underline{w}_3 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_2>}{<\underline{u}_2, \underline{u}_2>}\underline{u}_2 \end{aligned}$$

Vi faccio notare che per la Proposizione 1 il vettore $\underline{u}_2$ altri non è che $\underline{w}_2 - P_r(\underline{w}_2)$ con $r = \mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$ ed è quindi ortogonale a $\underline{w}_1 \equiv \underline{u}_1$ per la (6).
Notiamo inoltre che per la Proposizione 2 il vettore $\underline{u}_3$ altri non è che $\underline{w}_3 - P_\pi(\underline{w}_3)$ con $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$; questa differenza è ortogonale sia a $\underline{u}_1$ che a $\underline{u}_2$ per la (7).
Tutto questo dimostra che i tre vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono una base *ortogonale* ed hanno l'ulteriore proprietà che $\mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \mathcal{V}_O = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$. Una base *ortonormalizzata* è

$$\{\frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}\,.$$

Condizione di ortogonalità fra retta e piano.
Sia π un piano di $\mathcal{V}_O$ di equazione cartesiana $ax+by+cz = 0$ nelle coordinate (x, y, z) associate alla base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Un generatore per la retta ortogonale a π è dato da $\underline{n} := (a, b, c)$. Infatti: $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \pi \Leftrightarrow av_x + bv_y + cv_z = 0 \Leftrightarrow\ <\underline{n}, \underline{v}>= 0 \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{n}$. Quindi (l, m, n) è ortogonale a $ax + by + cz = 0$ se e solo se (l, m, n) è proporzionale a (a, b, c).

Equazioni cartesiane. Il ragionamento fatto dell'ultimo paragrafo dimostra che l'equazione cartesiana del piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}(\ell, m, n)$ è $\ell x + my + nz = 0$.
Le equazioni cartesiane della retta ortogonale ad un piano π dato tramite una sua base, $\pi = \mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$, con $\underline{v}$ di coordinate (v_1, v_2, v_3) e $\underline{w}$ di coordinate (w_1, w_2, w_3), si ottengono immediatamente dal seguente ragionamento:
un vettore di coordinate (x, y, z) è ortogonale al piano se e solo se, per definizione, è ortogonale ad ogni vettore del piano; ma ciò accade se e solo se (per linearità) esso è ortogonale ai vettori di una base del piano e quindi se e solo se

$$\begin{cases} xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0 \\ xw_1 + yw_2 + zw_3 = 0 \end{cases}$$

Orientazione di $\mathcal{V}_O$.
Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{V}_O$ sono dette equiorientate se il determinante della matrice del cambiamento di base è positivo. In tal caso diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono la stessa orientazione in $\mathcal{V}_O$; diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono orientazioni opposte di $\mathcal{V}_O$ se il determinante della matrice del cambiamento di base è negativo. Un'orientazione di

$\mathcal{V}_O$ è quindi la scelta di una base e, di conseguenza, di tutte le basi equiorientate con tale base. È ovvio che $\mathcal{V}_O$ ha due orientazioni.

Cambiamenti di base ortonormali.

Sia $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O$. Sia $\mathcal{B}' := \{\underline{v}'_1, \underline{v}'_2, \underline{v}'_3\}$ una seconda base. Sia B la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Proposizione 3. La base $\mathcal{B}'$ è ortonormale se e solo se $B^T B = I_3$

Dimostrazione. Dire che $\mathcal{B}'$ è ortonormale vuol dire che

$$(10) \qquad < \underline{v}'_i, \underline{v}'_j >= 0 \quad \text{se} \quad i \neq j\,; \quad < \underline{v}'_i, \underline{v}'_i >= 1\,.$$

Se in queste relazioni sostituiamo le espressioni di $\underline{v}'_j$ in funzione dei vettori di $\mathcal{B}$ e della matrice B scopriamo che le (10) altro non sono che le relazioni che impongono l'uguaglianza $B^T B = I_3$. La Proposizione è dimostrata.

Definizione. Sia $O(n) := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, A^T A = I_n\}$. Le matrici di $O(n)$ sono dette *ortogonali*. Notiamo che $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,|\, A^{-1} = A^T\}$, infatti $\det A = \pm 1$ (dato che $\det A^2 = 1$) da cui $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$; quindi le matrici ortogonali sono invertibili. Inoltre essendo per definizione $A^T A = I_n$ si deve avere, moltiplicando a destra ambo i membri per A^{-1}, $A^T = A^{-1}$ che è quello che avevamo enunciato.

Proposizione 4. $O(n)$ con il prodotto righe per colonne è un gruppo, detto *gruppo ortogonale.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che il prodotto righe per colonne di due matrici ortogonali è ancora ortogonale e che l'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale. Se $A, B \in O(n)$ allora $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I_n B = B^T B = I_n$; quindi $AB \in O(n)$ come volevasi. Inoltre, se $A \in O(n)$ allora $A^T = A^{-1}$ e quindi $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^{-1} (= A)$; dato che $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ abbiamo in definitiva $(A^{-1})^T = (A^{-1})^{-1}$ e cioè $A^{-1} \in O(n)$ come dovevamo dimostrare.

Il sottoinsieme $SO(n) = \{A \in O(n) \,|\, \det A = 1\}$ è anche un gruppo (il prodotto di due elementi in $SO(n)$ è ancora in $SO(n)$ e l'inverso di un elemento in $SO(n)$ è ancora in $SO(n)$) detto *gruppo ortogonale speciale.* Notiamo che gli elementi di $SO(3)$ possono essere pensati come le matrici di cambiamento di base, da una base ortonormale a una base ortonormale *equiorientata.*

Esempio. Non è difficile dimostrare (potete farlo per esercizio) che

$$O(2) = \{ \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{ \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

$$SO(2) = \{ \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

Se identifichiamo $\mathcal{V}_O^2$ con una base ortonormale a $\mathbb{R}^2$ con la base canonica allora capiamo che, ad esempio, la matrice $\begin{vmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{vmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base ottenura ruotando in senso antiorario la base canonica di $\pi/4$.

Isometrie. Sia $\mathcal{V}_O \equiv \mathcal{V}_O^3$. Un'applicazione lineare $T : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ è un'isometria se conserva le lunghezze dei vettori; in formule

$$||T\underline{v}|| = ||\underline{v}||\,, \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$$

Un'isometria è necessariamente iniettiva perché ha nucleo banale (se $T\underline{v} = \underline{0}$ allora $||T\underline{v}|| = 0$ ma allora, essendo T un'isometria, $||\underline{v}|| = 0$ e quindi $\underline{v} = \underline{0}$). Ne segue che T è biettiva. Inoltre

$$(11) \qquad < T\underline{v}, T\underline{v}' >=< \underline{v}, \underline{v}' >, \quad \forall \underline{v}.\underline{v}' \in \mathcal{V}_O .$$

In parole, T conserva il prodotto scalare, da cui segue che T conserva anche gli angoli (oltre alle lunghezze). Per dimostrare la formula (11) osserviamo che dalla bilinearità del prodotto scalare si ha la seguente identità (anche detta identità di polarizzazione)

$$< \underline{u}, \underline{w} >= \frac{1}{4}\left[||\underline{u}+\underline{w}||^2 - ||\underline{u}-\underline{w}||^2\right]$$

(basta ricordare che $||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >$, sviluppare quello che appare a secondo membro e fare i calcoli). La (11) segue da quest'identità, con $\underline{u} = T\underline{v}$, $\underline{w} = T\underline{v}'$; dovrete ovviamente utilizzare la linearità di T ed il fatto che è un'isometria.

Si potrebbe dimostrare, ma non lo faremo, che un'applicazione $T : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ che soddisfi $||T\underline{v}|| = ||\underline{v}|| \;\; \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ è necessariamente lineare.

Esempio. *Le simmetrie ortogonali sono isometrie.* Infatti:

$$||S_\pi \underline{v}||^2 = ||-\underline{v}_r + \underline{v}_\pi||^2 =< \underline{v}_r, \underline{v}_r > -2 < \underline{v}_r, \underline{v}_\pi > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi >$$

Ma $r \perp \pi$ per ipotesi, quindi $< \underline{v}_r, \underline{v}_\pi >= 0$ da cui

$$||S_\pi \underline{v}||^2 =< \underline{v}_r, \underline{v}_r > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi > .$$

Calcoliamo ora $||\underline{v}||^2$: si ha

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >=< \underline{v}_r, \underline{v}_r > +2 < \underline{v}_r, \underline{v}_\pi > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi >=< \underline{v}_r, \underline{v}_r > + < \underline{v}_\pi, \underline{v}_\pi > .$$

Quindi $||S_\pi \underline{v}||^2 = ||\underline{v}||^2$, che è quello che si doveva verificare.

Esempio. Le rotazioni attorno all'origine nel piano vettoriale $\mathcal{V}_O^2$ sono applicazioni lineari (ragionate direttamente sulla regola del parallelogramma) e sono chiaramente isometrie. Analogamente, le rotazioni attorno ad un asse (attorno, quindi, ad una retta vettoriale) in $\mathcal{V}_O^3$ sono isometrie.

Osservazione. Se T è un'isometria e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base ortonormale, allora è chiaro che $\mathcal{B}$ viene trasformata in una base ortonormale $\mathcal{B}'$ da T (infatti T è una biezione e, inoltre, T conserva le lunghezze e gli angoli). La matrice associata a T con scelta di base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{B}$ in arrivo (stessa base !) è quindi una matrice *ortogonale* [2].

Viceversa, supponiamo che T sia un endomorfismo e che la sua matrice associata ad una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sia una matrice ortogonale; allora, ragionando come nella Proposizione 3, T porta la base fissata in una base ortonormale. Ma allora da una parte $< \underline{v}, \underline{v}' >= x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$ e dall'altra, usando la linearità di T, la bilinearità di $<,>$ ed un semplice calcolo scopriamo che $< T\underline{v}, T\underline{v}' >$ è uguale a

$$\begin{aligned} x_1x_1' < T\underline{v}_1, T\underline{v}_1 > +x_2x_2' < T\underline{v}_2, T\underline{v}_2 > +x_3x_3' < T\underline{v}_3, T\underline{v}_3 > +& \\ x_1x_2' < T\underline{v}_1, T\underline{v}_2 > +x_2x_1' < T\underline{v}_2, T\underline{v}_1 > +& \\ x_1x_3' < T\underline{v}_1, T\underline{v}_3 > +x_3x_1' < T\underline{v}_3, T\underline{v}_1 > +& \\ x_2x_3' < T\underline{v}_2, T\underline{v}_3 > +x_3x_2' < T\underline{v}_3, T\underline{v}_2 >& \end{aligned}$$

[2] perché questa è la matrice che ha come colonne le coordinate di $T\underline{v}_j$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; ha quindi come colonne le coordinate di una base ortonormale $\mathcal{B}'$ in una base ortonormale $\mathcal{B}$

e dato che $\{T\underline{v}_1, T\underline{v}_2, T\underline{v}_3\}$ è una base ortonormale, vediamo che questa espressione è proprio $x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3$. Quindi $< T\underline{v}, T\underline{v}' >=< \underline{v}, \underline{v}' >$ il che vuol dire che T è un'isometria.

Osservazione. Possiamo quindi pensare alle matrici di $O(2)$ e $O(3)$ in due modi: come matrici di cambiamento di base, da base ortonormale $\mathcal{B}$ a base ortonormale $\mathcal{B}'$; oppure come matrici associate ad isometrie rispetto ad una fissata base ortormale $\mathcal{B}$.

Ad esempio la matrice $\begin{vmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{vmatrix}$ è

- la matrice del cambiamento di base, da una base ortonormale di $\mathcal{V}_O^2$, che identifichiamo alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, alla base di $\mathcal{V}_O^2$ data, nell'identificazione fra $\mathcal{V}_O^2$ a $\mathbb{R}^2$, dalla coppia di vettori
$$\begin{vmatrix} \cos\pi/4 \\ \sin\pi/4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\sin\pi/4 \\ \cos\pi/4 \end{vmatrix}$$
(questa è la base ottenuta ruotando in senso antiorario in $\mathbb{R}^2$ la base canonica di un angolo di $\pi/4$).
- la matrice associata nella base ortonormale fissata [3] alla rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario; equivalentemente, facendo uso dell'identificazione fra $\mathcal{V}_O^2$ con la base ortonormale fissata e $\mathbb{R}^2$ con la base canonica, all'applicazione $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario.

Prodotto vettoriale. Fissiamo un'orientazione in $\mathcal{V}_O$, ad esempio tramite la scelta di una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: rimane allora definito un prodotto fra vettori
$$\mathcal{V}_O \times \mathcal{V}_O \ni (\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} \in \mathcal{V}_O$$
che viene chiamato *prodotto vettoriale* (e viene anche denotato con $\times$). Per definizione $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è il vettore di $\mathcal{V}_O$ univocamente caaratterizzato dalle tre seguenti proprietà:

(i) la lunghezza del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è uguale a $||\underline{v}||||\underline{w}|| \sin \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ che è anche l'area del parallelogramma definito da $\underline{v}, \underline{w}$. Notiamo che $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0}$ se i due vettori sono paralleli.

(ii) se i due vettori *non* sono paralleli, allora la direzione del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quella ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

(iii) se i due vettori *non* sono paralleli, allora il verso del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quello per cui la base $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ è equiorientata alla base che definisce l'orientazione di $\mathcal{V}_O$.

In Fisica si usa fissare un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ tramite la mano sinistra o la mano destra facendo corrispondere $\underline{i}$ al dito medio, $\underline{j}$ all'indice ,$\underline{k}$ al pollice. Le due mani definiscono effettivamente le due orientazioni di $\mathcal{V}_O$, si veda la figura a pag 184. Se fissiamo ad esempio l'orientazione della mano sinistra allora il verso del prodotto vettoriale è quello del pollice se facciamo coincidere $\underline{v}$ al dito medio (ovviamente della mano sinistra) e $\underline{w}$ al dito indice.

Proposizione 5. Il prodotto vettoriale gode delle seguenti propietà:

- $\underline{v} \wedge \underline{w} = -\underline{w} \wedge \underline{v}$
- $(\lambda\underline{v}) \wedge \underline{w} = \lambda(\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{v} \wedge (\lambda\underline{w})$
- $(\underline{v} + \underline{v}') \wedge \underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v}' \wedge \underline{w}$
- $\underline{v} \wedge (\underline{w} + \underline{w}') = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{w}$

[3] quindi base partenza = base arrivo = base ortonormale fissata

- se $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ e $\underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & v_1 & w_1 \\ \underline{j} & v_2 & w_2 \\ \underline{k} & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

(a destra sviluppiamo formalmente con Laplace secondo la prima colonna).

Dimostrazione. Il primo punto (antisimmetria) si ottiene ragionando sulle orientazioni. La dimostrazione della bilinearità è omessa. La formula per il prodotto vettoriale segue dall'antisimmetria e dalla bilinearità: si scrive $(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) \wedge (w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k})$, si sviluppa utilizzando la bilinearità e si utilizzano le seguenti relazioni, conseguenza diretta della definizione:

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}\,, \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}\,, \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}\,.$$

È bene notare che il prodotto vettoriale *non* è associativo: ad esempio $\underline{i} \wedge (\underline{j} \wedge \underline{j})$ è uguale a $\underline{i} \wedge \underline{0}$ che è uguale a $\underline{0}$, mentre $(\underline{i} \wedge \underline{j}) \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$ come subito si verifica utilizzando l'ultima formula nella Proposizione 5.