Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Appunti di geometria euclidea

Fissiamo un'unità di misura nello spazio euclideo. Sia $\mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori centrati in O. Nelle pagine che seguono ci occuperemo solo di questioni vettoriali: vi rimando al Cap. 13 di Abate per il passagio dalla geometria *vettoriale* euclidea alla geometria euclidea dello spazio [1].

Il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in \mathcal{V}_0$ è per definizione il numero reale:

$$< \underline{v}, \underline{w} >= ||\underline{v}||\,||\underline{w}|| \cos \widehat{\underline{v}\underline{w}}\,,$$

dove prendiamo l'angolo convesso fra i due vettori (quindi $\widehat{\underline{v}\underline{w}} \in [0, \pi]$). Si noti che allora

$$||\underline{v}||^2 =< \underline{v}, \underline{v} >$$

e che

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{< \underline{v}, \underline{w} >}{\sqrt{< \underline{v}, \underline{v} >} \cdot \sqrt{< \underline{w}, \underline{w} >}}$$

se $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0}$.
In particolare

$$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow < \underline{v}, \underline{w} >= 0\,.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:
(i) è simmetrico: $< \underline{v}, \underline{w} >=< \underline{w}, \underline{v} > \forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{V}_O$;
(ii) è lineare in entrambi gli argomenti (*bilineare*):

$$< \lambda\underline{v} + \lambda'\underline{v}', \underline{w} >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > +\lambda' < \underline{v}', \underline{w} >$$
$$< \underline{v}, \lambda\underline{w} + \lambda'\underline{w}' >= \lambda < \underline{v}, \underline{w} > +\lambda' < \underline{v}, \underline{w}' >$$

per ogni $\underline{v}, \underline{v}', \underline{w}, \underline{w}' \in \mathcal{V}_O$ e per ogni $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$
(iii) $< \underline{v}, \underline{v} > \geq 0 \ \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_O$ ed è $= 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$

La dimostrazione di (i) e (iii) è ovvia. Omettiamo la dimostrazione di (ii).

Una base è detta *ortonormale* se i vettori della base hanno lunghezza unitaria e sono a due a due ortogonali; denotiamo tale base con $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$; siano (x, y, z) le coordinate associate.

Possiamo verificare facilmente che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

(1) $$< \underline{v}, \underline{w} >= xx' + yy' + zz'\,.$$

Per dimostrare questa formula basterà applicare ripetutamente la bilinearità ed utilizzare la traduzione in formule della condizione di ortonormalità per la base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$:

(2) $$\begin{array}{lll} < \underline{i}, \underline{j} >= 0\,, & < \underline{i}, \underline{k} >= 0\,, & < \underline{j}, \underline{k} >= 0 \\ < \underline{i}, \underline{i} >= 1\,, & < \underline{j}, \underline{j} >= 1\,, & < \underline{k}, \underline{k} >= 1 \end{array}$$

In particolare, dalla (1) segue che $||\underline{v}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e

$$\cos \widehat{\underline{v}\underline{w}} = \frac{(xx' + yy' + zz')}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}$$

In particolare, se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ e $\underline{w} = x'\underline{i} + y'\underline{j} + z'\underline{k}$ allora

(3) $$\underline{v} \perp \underline{w} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0\,.$$

[1] nella prima ci occupiamo di vettori e *sottospazi vettoriali* di $\mathcal{V}_O$, nella seconda ci occupiamo di punti, rette e piani dello spazio euclideo.

Un vettore di lunghezza unitaria è detto un *versore*: se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\underline{v}/\|\underline{v}\|$ è un versore. In particolare se $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ allora r è generata da due versori

$$\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}\,, \quad \text{e} \quad -\frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$$

Una retta *orientata* è una retta insieme alla scelta di un vettore generatore, o, equivalentemente, di uno dei due versori. È ovvio che una retta ha due orientazioni.

Abbiamo anche osservato che se $\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ allora

$$x = <\underline{v}, \underline{i}>\,, \quad y = <\underline{v}, \underline{j}>\,, \quad z = <\underline{v}, \underline{k}> \ .$$

Questa formula si ottiene prendendo il prodotto scalare di $\underline{v}$ con i tre vettori della base ortonormale ed utilizzando (2); per ogni vettore $\underline{v}$ vale quindi l'identità

$$\underline{v} = <\underline{v}, \underline{i}> \underline{i} + <\underline{v}, \underline{j}> \underline{j} + <\underline{v}, \underline{k}> \underline{k} \tag{4}$$

In particolare, se r è una retta orientata e $\underline{r}$ un *versore* che la definisce, allora

$$\begin{aligned}\underline{r} &= <\underline{r}, \underline{i}> \underline{i} + <\underline{r}, \underline{j}> \underline{j} + <\underline{r}, \underline{k}> \underline{k}\\ &= (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{i}})\underline{i} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{j}})\underline{j} + (\cos \widehat{\underline{r}\,\underline{k}})\underline{k}\end{aligned}$$

e scopriamo quindi che le coordinate del versore che definisce una retta orientata non sono altro che i coseni degli angoli che tale versore forma con i vettori della base. Per questa ragione si dà il nome di *coseni direttori* alle coordinate di un versore di una retta orientata.

Sia $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$ una retta. Sia $(r)^\perp$ il piano ortogonale a questa retta. È ovvio che si ha una decomposizione in somma diretta:

$$\mathcal{V}_O = r \oplus (r)^\perp$$

Ogni vettore $\underline{v}$ dello spazio $\mathcal{V}_O$ si scrive in maniera unica come

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_{(r)^\perp} \tag{5}$$

Rimane quindi definita l'applicazione lineare P_r = proiezione sulla retta r (con $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$) parallelamente al piano $(r)^\perp$:

$$P_r(\underline{v}) := \underline{v}_r$$

Chiamiamo questa proiezione *la proiezione ortogonale sulla retta* r. Dato un vettore $\underline{v}$, il vettore $P_r(\underline{v})$ è detto *la proiezione ortogonale di* $\underline{v}$ *sulla retta* r. Analogamente abbiamo l'applicazione lineare $P_{(r)^\perp}$:

$$P_{(r)^\perp}(\underline{v}) := \underline{v}_{(r)^\perp}$$

che chiamiamo semplicemente la *proiezione ortogonale sul piano* $(r)^\perp$.
Dalla (5) segue che

$$P_r + P_{(r)^\perp} = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}_O}\ .$$

Dal teorema dei seni per i triangoli rettangoli (fate una figura) segue facilmente la seguente

Proposizione 1. *Il vettore*

$$\frac{<\underline{v}, \underline{w}>}{<\underline{w}, \underline{w}>}\underline{w}$$

rappresenta la proiezione ortogonale del vettore $\underline{v}$ *sulla retta* $r = \mathrm{Span}(\underline{w})$. *In formule:*

$$P_r(\underline{v}) = \frac{<\underline{v}, \underline{w}>}{<\underline{w}, \underline{w}>}\underline{w}\,, \quad \textit{con} \quad r = \mathrm{Span}(\underline{w}) \tag{6}$$

È ovvio che

$$(\underline{v} - P_r(\underline{v})) \perp \underline{w} \quad (r = \mathrm{Span}(\underline{w})) \tag{7}$$

perché per costruzione $(\underline{v} - P_r\underline{v}) \in (r)^{\perp}$.

Sia π un piano. Sia $r = (\pi)^{\perp}$ la retta ortogonale al piano. C'è una decomposizone $\mathcal{V}_O = r \oplus \pi$; quindi per ogni $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ si ha

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_\pi\,, \quad r = (\pi)^{\perp} \tag{8}$$

Sia P_π la proiezione ortogonale su π (e cioè la proiezione su π parallelamente alla retta ortogonale $\pi^{\perp}$); in formule

$$P_\pi\underline{v} = \underline{v}_\pi\,.$$

Supponiamo che $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, con $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$. È ovvio che

$$(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}\,, \quad \forall \underline{u} \in \pi$$

perché per costruzione $(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \in r = (\pi)^{\perp}$. In particolare,

$$(\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}_1\,, \quad (\underline{v} - \underline{v}_\pi) \perp \underline{u}_2 \tag{9}$$

Proposizione 2. *La proiezione ortogonale* P_π *su* π *è data da*

$$P_\pi\underline{v} = \frac{<\underline{v}, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 + \frac{<\underline{v}, \underline{u}_2>}{<\underline{u}_2, \underline{u}_2>}\underline{u}_2 \tag{10}$$

se $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ *e* $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$.

Dimostrazione. Sia $\underline{u}_3$ un generatore di $r = (\pi)^{\perp}$. La base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ è ortogonale. La base

$$\{\underline{f}_1 := \frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \underline{f}_2 := \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \underline{f}_3 := \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}$$

è quindi *ortonormale*. Utilizzando l'analoga della (4) per questa base ortonormale scopriamo che ogni vettore $\underline{v} \in \mathcal{V}_O$ si scrive come

$$\underline{v} = \Big(<\underline{v}, \underline{f}_1> \underline{f}_1 + <\underline{v}, \underline{f}_2> \underline{f}_2\Big) + \Big(<\underline{v}, \underline{f}_3> \underline{f}_3\Big)$$

con il primo addendo in π ed il secondo addendo in $(\pi)^{\perp}$. Ma allora per definizione $P_\pi(\underline{v}) = (<\underline{v}, \underline{f}_1> \underline{f}_1 + <\underline{v}, \underline{f}_2> \underline{f}_2)$ ed utilizzando la definizione di $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ segue subito la tesi.

Vediamo ora il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.

Se $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è una qualsiasi base di $\mathcal{V}_O$ allora la sua base *ortogonalizzata* secondo il procedimento di Gram-Schmidt è la base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ con

$$\begin{aligned}\underline{u}_1 &= \underline{w}_1\\ \underline{u}_2 &= \underline{w}_2 - \frac{<\underline{w}_2, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1\\ \underline{u}_3 &= \underline{w}_3 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_1>}{<\underline{u}_1, \underline{u}_1>}\underline{u}_1 - \frac{<\underline{w}_3, \underline{u}_2>}{<\underline{u}_2, \underline{u}_2>}\underline{u}_2\end{aligned}$$

Vi faccio notare che per la Proposizione 1 il vettore $\underline{u}_2$ altri non è che $\underline{w}_2 - P_r(\underline{w}_2)$ con $r = \mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$ ed è quindi ortogonale a $\underline{w}_1 \equiv \underline{u}_1$ per la (7).

Notiamo inoltre che per la Proposizione 2 il vettore $\underline{u}_3$ altri non è che $\underline{w}_3 - P_\pi(\underline{w}_3)$ con $\pi = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$; questa differenza è ortogonale sia a $\underline{u}_1$ che a $\underline{u}_2$ per la (9). Tutto questo dimostra che i tre vettori $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ sono una base *ortogonale* ed hanno l'ulteriore proprietà che $\mathrm{Span}(\underline{w}_1) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2) = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$, $\mathrm{Span}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3) = \mathcal{V}_O = \mathrm{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$. Una base *ortonormalizzata* è

$$\{\frac{1}{||\underline{u}_1||}\underline{u}_1, \frac{1}{||\underline{u}_2||}\underline{u}_2, \frac{1}{||\underline{u}_3||}\underline{u}_3\}\,.$$

Sia π un piano di $\mathcal{V}_O$ di equazione cartesiana $ax + by + cz = 0$ nelle coordinate (x, y, z) associate alla base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$. Un generatore per la retta ortogonale a π è dato da $\underline{n} := (a, b, c)$. Infatti: $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z) \in \pi \Leftrightarrow av_x + bv_y + cv_z = 0 \Leftrightarrow \, < \underline{n}, \underline{v} >= 0 \Leftrightarrow \underline{v} \perp \underline{n}$. Questo stesso ragionamento dimostra anche che l'equazione del piano ortogonale alla retta $\mathbb{R}(\ell, m, n)$ è $\ell x + my + nz = 0$

Per questioni di geometria euclidea vi rimando ora al Cap. 13 di Abate (omettete dalla riga -6 pag 313 alla riga 16 pag 314). Le dimostrazioni delle formule per la distanza punto-retta, la distanza punto-piano e la distanza retta-retta sono facoltative.