Algebra 1

Proff. A. De Sole, P. Piazza e E. Spinelli

Secondo Esonero

15 Giugno 2012

Nome e Cognome: *Alberto De Sole*

Numero di Matricola: *1234567890*

Docente (cerchiare il canale di appartenenza):

A. De Sole , **P. Piazza** , **E. Spinelli**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	6
2	6	6
3	6	6
4	6	6
5	6	6
Totale	30	30

Giustificate le risposte!

Esercizio 1. Si consideri il polinomio $p(x) = 45 + 75x^2 + 15x^4 + 3x^5$. Si determini se $p(x)$ è un elemento irriducibile in:

(a) $\mathbb{C}[x]$,

(b) $\mathbb{R}[x]$,

(c) $\mathbb{Q}[x]$,

(d) $\mathbb{Z}[x]$,

(e) $\mathbb{Z}/3[x]$,

(f) $\mathbb{Z}/5[x]$.

Soluzione:

(a) In $\mathbb{C}[x]$ gli elementi irriducibili hanno grado 1, quindi $p(x)$ deve essere riducibile.

(b) In $\mathbb{R}[x]$ gli elementi irriducibili hanno grado 1 o 2, quindi $p(x)$ deve essere riducibile.

(c) In $\mathbb{Q}[x]$ $p(x)$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein con $p = 5$.

(d) In $\mathbb{Z}[x]$ abbiamo la fattorizzazione in irriducibili $p(x) = 3(15 + 25x^2 + 5x^4 + x^5)$, e quindi $p(x)$ è riducibile.

(e) In $\mathbb{Z}/3[x]$ vale $p(x) = 0$, che è riducibile (per definizione).

(f) In $\mathbb{Z}/5[x]$ vale $p(x) = 3x^5$ che è riducibile come $p(x) = 3x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$.

Risposta: (cerchiare la risposta corretta)

(a) In $\mathbb{C}[x]$ $p(x)$ è <u>*riducibile*</u> / *irriducibile*

(b) In $\mathbb{R}[x]$ $p(x)$ è <u>*riducibile*</u> / *irriducibile*

(c) In $\mathbb{Q}[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / <u>*irriducibile*</u>

(d) In $\mathbb{Z}[x]$ $p(x)$ è <u>*riducibile*</u> / *irriducibile*

(e) In $\mathbb{Z}/3[x]$ $p(x)$ è <u>*riducibile*</u> / *irriducibile*

(f) In $\mathbb{Z}/5[x]$ $p(x)$ è <u>*riducibile*</u> / *irriducibile*

Esercizio 2. Si consideri l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Si determini la cardinalità dell'anello quoziente $A = \mathbb{Z}[i]/(8+8i, 4+i)$.

Soluzione:

In $\mathbb{Z}[i]$ l'elemento $4+i$ è in primo di Gauss (poichè $N(4+i) = 4^2+1 = 17$ è primo), e l'elemento $8+8i$ ammette la seguente fattorizzazione come prodotto di primi di Gauss: $8+8i = 2^3(1+i) = (1+i)^4(1+i)^3$. Dunque $4+i$ e $8+8i$ non hanno fattori primi in comune, e vale quindi $MCD(8+8i, 4+i) = 1$.

Ma allora $(8+8i, 4+i) = (1) = \mathbb{Z}[i]$, e quindi $A = \mathbb{Z}[i]/(8+8i, 4+i) = \mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z}[i] = \{0\}$, che ha cardinalità 1.

Risposta:

$Card(A)=$ $\boxed{1}$

Esercizio 3. Si consideri il sottogruppo abeliano $U \subset \mathbb{Z}^3$ generato dai seguenti elementi:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} \ , \ v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} .$$

Descrivere $\mathbb{Z}^3/U$ come prodotto di gruppi ciclici.

Soluzione:
La matrice di presentazione dell'anello A è

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -2 \\ -6 & -14 & -10 & 8 \\ 9 & 6 & 12 & -6 \end{pmatrix},$$

che può essere portata nella seguente forma diagonale tramite operazioni elementari:

$$T \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 8 & -14 & -10 & 8 \\ 3 & 6 & 12 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -30 & -42 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -42 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque vale l'isomorfismo $A \simeq \mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}$.

Risposta:

$\mathbb{Z}^3/U \simeq$ $\boxed{\mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}}$

Esercizio 4. Dato un intero $n \geq 1$, si consideri l'insieme

$$I_n = \left\{ f(x) \in \mathbb{Z}[x] \text{ tale che } n \middle| f(3) \right\} \subset \mathbb{Z}[x] \,.$$

(a) Dimostare che $I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è un ideale.

(b) Determinare per quali valori di n l'ideale $I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è massimale.

Soluzione:

Dato i numeri interi 3 e n, abbiamo l'omorfismo $\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/n$ dato da $\phi(p(x)) = [p(3)]_n$ (dato dalla proprietà universale dell'anello dei polinomi). Chiaramente, il nucleo di tale omomorfismo è proprio $\ker(\phi) = I_n$, che dunque è un ideale. Inoltre, ϕ è ovviamente suriettivo, dunque per il Teorema di isomorfismo, induce un isomorfismo al quoziente: $\bar{\phi} : \mathbb{Z}[x]/I_n \simeq \mathbb{Z}/n$. Segue che $I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è massimale se e solo se $\mathbb{Z}[x]/I_n \simeq \mathbb{Z}/n$ è un campo, ovvero se e solo se n è primo.

Risposta:

$I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è massimale per n= $\boxed{\text{primo}}$

Esercizio 5. Sia A un anello commutativo con unità. Un A-modulo M è detto *Noetheriano* se ogni catena ascendente di sottomoduli

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots \subset M\,,$$

necessariamente stabilizza, ovvero da un certo $N \geq 1$ in poi vale $U_N = U_{N+1} = U_{N+2} = \dots$. Dimostrare che se M è un A-modulo Noetheriano e $\varphi :\, M \to M$ è un omomorfismo suriettivo di A-moduli, allora $\varphi :\, M \to M$ è un isomorfismo.
(*Suggerimento:* si considerimo i sottomoduli $\ker(\varphi^n)$, $n \in \mathbb{N}$.)

Soluzione:

Dibbiamo dimostrare che φ è iniettiva, ovvero $\ker(\varphi) = 0$. Supponiamo, per assurdo, che $x_1 \in \ker(\varphi)\backslash\{0\}$. Poichè φ è suriettiva, esiste x_2 tale che $\varphi(x_2) = x_1 \neq 0$, e dunque $\varphi^2(x_2) = 0$. In altri termini, $x_2 \in \ker(\varphi^2)\backslash \ker(\varphi)$. Supponiamo, per induzione, che $x_n \in \ker(\varphi^n)/\backslash \ker(\varphi^{n-1})$. Allora, per la suriettività di φ abbiamo $x_n = \varphi(x_{n+1})$, e dunque $\varphi^{n+1}(x_{n+1}) = \varphi^n(x_n) = 0$, e $\varphi^n(x_{n+1}) = \varphi^{n-1}(x_n) \neq 0$. Ovvero $x_{n+1} \in \ker(\varphi^{n+1})/\backslash \ker(\varphi^n)$. In conclusione, abbiamo una catena ascendente di sottomoduli che non stabilizza mai: $\{0\} \subsetneq \ker(\varphi) \subsetneq \ker(\varphi^2) \subsetneq \ker(\varphi^3) \subsetneq \dots$, contraddiciendo l'ipotesi di Noetherianità di M.

.

(pagina lasciata intenzionalmente bianca)

(pagina lasciata intenzionalmente bianca)