Geometria

Prof P. Piazza

Secondo esonero. Soluzioni.

25 Gennaio 2013

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	7	
3	6	
4	6	
5	7	
Totale	32	

ATTENZIONE : GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI !

Esercizio 1. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane e parametriche del piano π passante per la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione $x - y - z = 3$

Soluzione: se τ è un piano di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ allora la sua giacitura W_τ ha equazione $ax + by + cz = 0$ mentre il vettore ortogonale a W_τ ha coordinate (a, b, c). Le equazioni cartesiane per s sono

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Quindi i piani per s hanno equazioni cartesiane

$$\lambda(2x - y - 2) + \mu(2x + z - 1) = 0,$$

dove $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Due piani π e σ sono ortogonali se e solo se i vettori perpendicolari alle loro giaciture sono a loro volta ortogonali. Imponendo che il vettore ortogonale alla giacitura di $\lambda(2x - y - 2) + \mu(2x + z - 1) = 0$ abbia prodotto scalare nullo con il vettore ortogonale alla giacitura di σ otteniamo l'equazione

$$3\lambda + \mu = 0.$$

Quindi il piano cercato ha equazione cartesiana

$$4x + y + 3z - 1 = 0.$$

Esercizio 2. Giustificando le risposte, stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
1. $\det(-A) = -\det A, \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$
2. $\det(A+B) = \det(A) + \det(B), \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
3. $\det(AB) = \det(BA), \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
4. $P_A(\lambda) = P_{-A}(\lambda), \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
5. $A \in O(n)$ implica che A è diagonalizzabile.
6. (vale 2 punti) $A \in O(3)$ implica che A ammette un autovalore reale λ e $|\lambda| = 1$.

Soluzione:

1. Falso. In verità $\det(-A) = (-1)^n \det A$ perché il determinante è lineare *in ogni riga*.

2. Falso. Per esempio se
$$A := \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B := \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$
si ha che $\det A = \det B = 0$, ma $\det(A+B) = 1$.

3. Vero. Per la formula di Binet e la commutativitá del prodotto tra numeri reali $\det(AB) = (\det A)\cdot(\det B) = (\det B)\cdot(\det A) = \det(BA)$.

4. Falso. Abbiamo
$$p_A(\lambda) = \lambda^n - Tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots$$
Siccome $Tr(-A) = -Tr(A)$, vediamo che $P_A(\lambda) \neq P_{-A}(\lambda)$.

5. Falso. La matrice 2×2 che rappresenta nel piano una rotazione di angolo diverso da un multiplo intero di π non ha autovalori, e quindi non è diagonalizzabile.

6. Vero. Il polinomio caratteristico di $A \in O(3)$ ammette almeno una radice reale perché è di grado dispari. Ne segue che esiste un autovettore $\underline{v}$ per L_A e sia λ l'autovalore associato. Allora, da una parte $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ e dall'altra $\|A\underline{v}\| = \|\underline{v}\|$ perché L_A è un'isometria. Quindi $\|\lambda\underline{v}\| = \|\underline{v}\|$ e quindi $|\lambda| = 1$.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare canonico. Sia $H \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale definito dall'equazione cartesiana

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Calcolare la matrice 4×4 associata, nella base canonica, all'operatore S di simmetria ortogonale rispetto ad H.

Facoltativo. Determinare tramite una sua base un sottospazio W di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che abbia le seguenti due proprità:

(1) W è invariante per S (e cioè $S(W) \subset W$);

(2) la restrizione di S a W, ben definita per (1), ha traccia uguale a zero.

Soluzione:

Sia $\underline{w} = (1, 2, -1, 1)$ e sia $\underline{u} = \underline{w}/||\underline{w}|| = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, 2, -1, 1)$. Si ha allora $\mathbb{R}\underline{u} = H^\perp$ e quindi si ha la decomposizione ortogonale

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\underline{u} \oplus H.$$

Sia $\underline{v} = \underline{v}_{H^\perp} + \underline{v}_H$ la decomposizione di un generico vettore secondo questa somma diretta. Per definizione

$$S(\underline{v}) = -\underline{v}_{H^\perp} + \underline{v}_H = \underline{v} - 2\underline{v}_{H^\perp} = (\mathrm{Id} - 2P_{H^\perp})\underline{v}$$

con $P_{H^\perp}$ la proiezione ortogonale sulla retta $\mathbb{R}\underline{u}$. Basta quindi trovare la matrice associata a $P_{H^\perp}$. D'altra parte questa si ottiene prendendo come j-ma colonna la quadrupla $< \underline{e}_j, \underline{u} > \underline{u}$. Facendo tutti i calcoli si ottiene

$$\frac{1}{7}\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Il sottospazio di dimensione 2 generato da $\underline{u}$ e da un qualsiasi vettore $\underline{h}$ di H è invariante per S (perché S è lineare e $\underline{u}$ e $\underline{h}$ sono autovettori associati agli autovalori -1 e 1 rispettivamente). Inoltre la traccia della restrizione è uguale a zero perche $S|_W$ ha matrice associata $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ nella base di W costituita da $\underline{u}$ e $\underline{h}$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica fissata.
(1) Spiegare perché

$$b(\underline{x}, \underline{y}) := x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

definisce una forma bilineare simmetrica
(2) Stabilire se $b(\, , \,)$ è non-degenere.
(3) Si fissi in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare canonico. Determinare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^4$ che sia diagonalizzante per $b(\, , \,)$. Determinare la matrice associata a $b(\, , \,)$ in questa base. Determinare la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base ortonormale diagonalizzante per $b(\, , \,)$.
(4) Determinare indice di positività ed indice di negatività di $b(\, , \,)$.
(5) **Facoltativo.** Determinare un piano σ di $\mathbb{R}^4$ (tramite una sua base) tale che la restrizione di $b(\, , \,)$ a σ sia definita negativa.

Soluzione:
(1). Si ha $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$ con A data dalla matrice $A_b^{\mathcal{E}}$ che compare qui sotto. Il fatto che $\underline{y}^T A \underline{x}$ definisca una forma bilineare simmetrica è stato spiegato a lezione e nelle note sulle forme bilineari simmetriche.
(2). Dato che la matrice $A_b^{\mathcal{E}}$ associata alla forma bilineare $b(\, , \,)$ nella base canonica $\mathcal{E}$ è data da

$$A_b^{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e dato che questa matrice ha determinante uguale a 1, ne segue che $b(\, , \,)$ è non degenere.
(3). Definiamo un operatore simmetrico S tramite la matrice simmetrica di cui in (2); quindi, per definizione, $S = F_A$ con $A = A_b^{\mathcal{E}}$. Sappiamo che una base *ortonormale* di autovettori per S, certamente esistente per il teorema spettrale, diagonalizza simultaneamente l'operatore S e la forma bilineare $b(\, , \,)$. [1] Per determinare una base ortonormale di autovettori per S calcoliamo innanzitutto il polinomio caratteristico di S che è dato da

$$P_A(T) = \det \begin{pmatrix} -T & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-T \end{pmatrix} = -(T-1)(T+1)(1-T)(1+T)\,;$$

otteniamo quindi gli autovalori $\lambda_1 = 1$ con $m_a(1) = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con $m_a(-1) = 2$. L'autospazio V_1 associato all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è dato dalle quaterne $\underline{x}$ tali che $(S - \mathrm{Id})\underline{x} = \underline{0}$. Si ottiene il sottospazio di equazioni cartesiane $x^1 - x^2 = 0, x^4 = 0$. Una base ortonormale di questo sottospazio 2-dimensionale è data da

$$\underline{w}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\,, \qquad \underline{w}_2 = (0, 0, 1, 0)\,.$$

Dato che ci sono solo due autovalori e dato che S è simmetrico deve essere $V_{-1} = (V_1)^\perp$. Le equazioni cartesiane di V_{-1} si ottengono allora imponendo che il generico vettore $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^4$ sia ortogonale sia a $\underline{w}_1$ che a $\underline{w}_2$; ne segue che V_{-1} ha equazioni cartesiane $x^1 + x^2 = 0, x^3 = 0$. Ovviamente queste equazioni potevano ottenersi anche direttamente, calcolando con l'usuale metodo V_{-1} (senza fare il precedente ragionamento). Una base ortonormale di V_{-1} è data dai vettori

$$\underline{w}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\,, \qquad \underline{w}_4 = (0, 0, 0, 1)\,.$$

I vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ forniscono la base cercata e si ha

$$A_b^{\mathcal{W}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

[1] Tipica domanda d'esame: *Perché ?!*

La matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base diagonalizzante, è la matrice che ha $\underline{w}_j$ come j-ma colonna.
(4). Tenendo conto della matrice appena scritta è chiaro che l'indice di positività è 2 e l'indice di negatività è anche 2.
(5). Sia W il sottospazio V_{-1}; è chiaro che la restrizione di b a W è definita negativa.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalla matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(1) Stabilire se l'operatore L_A è diagonalizzabile.
(2) Stabilire se l'operatore $L_A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definito da A è diagonalizzabile.

Soluzione:
L'operatore L_A non è diagonalizzabile. Infatti, calcolando il polinomio caratteristico si ottiene il polinomio $(1-\lambda)(\lambda^2-1)$. Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica $m_a(-1) = 1$. Si verifica senza difficoltà che l'autospazio associato all'autovalore 1 è la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ne segue che $m_g(1) = 1$; dato che $m_g(1) < m_a(1)$ l'operatore non è diagonalizzabile.
Esattamente nello stesso modo si dimostra che $L_A^{\mathbb{C}}$ non è diagonalizzabile.

Risposta: