Algebra 1

Proff. A. De Sole, P. Piazza e E. Spinelli

Secondo Esonero

15 Giugno 2012

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Docente (cerchiare il canale di appartenenza):

A. De Sole , **P. Piazza** , **E. Spinelli**

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Giustificate le risposte!

Esercizio 1. Si consideri il polinomio $p(x) = 45 + 75x^2 + 15x^4 + 3x^5$. Si determini se $p(x)$ è un elemento irriducibile in:

(a) $\mathbb{C}[x]$,

(b) $\mathbb{R}[x]$,

(c) $\mathbb{Q}[x]$,

(d) $\mathbb{Z}[x]$,

(e) $\mathbb{Z}/3[x]$,

(f) $\mathbb{Z}/5[x]$.

Soluzione:

Risposta: (cerchiare la risposta corretta)

(a) In $\mathbb{C}[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / *irriducibile*

(b) In $\mathbb{R}[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / *irriducibile*

(c) In $\mathbb{Q}[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / *irriducibile*

(d) In $\mathbb{Z}[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / *irriducibile*

(e) In $\mathbb{Z}/3[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / *irriducibile*

(f) In $\mathbb{Z}/5[x]$ $p(x)$ è *riducibile* / *irriducibile*

Esercizio 2. Si consideri l'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$. Si determini la cardinalità dell'anello quoziente $A = \mathbb{Z}[i]/(8+8i, 4+i)$.

Soluzione:

Risposta:

$Card(A)=$ $\boxed{}$

Esercizio 3. Si consideri il sottogruppo abeliano $U \subset \mathbb{Z}^3$ generato dai seguenti elementi:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \ , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} \ , \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} .$$

Descrivere $\mathbb{Z}^3/U$ come prodotto di gruppi ciclici.

Soluzione:

Risposta:

$\mathbb{Z}^3/U \simeq$ $\boxed{}$

Esercizio 4. Dato un intero $n \geq 1$, si consideri l'insieme

$$I_n = \{ f(x) \in \mathbb{Z}[x] \ \text{ tale che } \ n \big| f(3) \} \subset \mathbb{Z}[x] \, .$$

(a) Dimostare che $I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è un ideale.

(b) Determinare per quali valori di n l'ideale $I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è massimale.

Soluzione:

Risposta:

$I_n \subset \mathbb{Z}[x]$ è massimale per $n=$ $\boxed{}$

Esercizio 5. Sia A un anello commutativo con unità. Un A-modulo M è detto *Noetheriano* se ogni catena ascendente di sottomoduli

$$U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \cdots \subset M\,,$$

necessariamente stabilizza, ovvero da un certo $N \geq 1$ in poi vale $U_N = U_{N+1} = U_{N+2} = \dots$. Dimostrare che se M è un A-modulo Noetheriano e $\varphi : M \to M$ è un omomorfismo suriettivo di A-moduli, allora $\varphi : M \to M$ è un isomorfismo.
(*Suggerimento:* si considerimo i sottomoduli $\ker(\varphi^n)$, $n \in \mathbb{N}$.)

Soluzione:

.

(pagina lasciata intenzionalmente bianca)

(pagina lasciata intenzionalmente bianca)