Geometria

Prof P. Piazza

Primo esonero.
Compito A

23 Novembre 2012

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	4	
3	6	
4	5	
5	5	
6	6	
Totale	32	

ATTENZIONE : GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI !

Esercizio 1. Consideriamo la matrice $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Consideriamo il sottoinsieme di $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$

$$W = \{X \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \text{ tali che } AX = XA\}.$$

con AX e XA prodotti righe per colonne.
(i) Stabilire se W è un sottospazio (se lo è, dimostratelo; se non lo è, spiegate perché).
(ii) In caso affermativo determinare una base di W.

Soluzione: **(i)** Per stabilire se W è un sottospazio dobbiamo vedere se è chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Se X_1 e X_2 sono due elementi di W, allora $AX_1 = X_1A$ e $AX_2 = X_2A$ per ipotesi; ma allora dalle proprietà distributive del prodotto righe-per-colonne abbiamo subito

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = X_1A + X_2A = (X_1 + X_2)A\,; \text{ quindi } X_1 + X_2 \in W.$$

Analogamente si procede per λX, con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X \in W$.
Per trovare una base di W scriviamo per esteso la proprietà che caratterizza gli elementi di W; sia $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ la generica matrice in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Allora

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ -a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & 2a \\ -d & 2c \end{vmatrix}$$

Quindi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \in W$ se e solo se $b = -2c$ e $a = d$; scritto diversamente $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ appartiene a W se e solo se è del tipo $\begin{vmatrix} a & -2c \\ c & a \end{vmatrix}$. Dato che $\begin{vmatrix} a & -2c \\ c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ne deduciamo che $W = \mathrm{Span}(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix})$ e dato che le due matrici nello span sono chiaramente indipendenti (perché non proporzionali) ne deduciamo che sono una base di W.

Risposta:

È **vero** che W è un sottospazio.

Base di $W = \{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\}$

Esercizio 2. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi (se un sottoinsieme è un sottospazio, dimostratelo; se non lo è spiegate perché).
$W_1 \subset \mathbb{R}^5$, $W_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0\}$
$W_2 \subset \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $W_2 = \{A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per } i \neq j, a_{ii} \neq 0\}$
$W_3 \subset \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, $W_3 = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_2\}$ con I_2 la matrice identità.
$W_4 \subset \mathbb{R}^5$, $W_4 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1\}$
$W_5 \subset \mathbb{R}^2$, $W_5 = \{t_1\underline{e}_1 + t_2\underline{e}_2, t_j \geq 0\}$ con $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$.
$W_6 \subset \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $W_6 = \{A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid A \text{ invertibile. }\}$

Soluzione: $W_1 = \{\underline{0}\}$ ed è quindi un sottospazio.
W_2 non è un sottospazio perché, ad esempio, non contiene il vettore nullo di $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$.
W_3 non è un sottospazio perché, ad esempio, non contiene il vettore nullo di $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.
W_4 non è un sottospazio perché, ad esempio, non contiene il vettore nullo di $\mathbb{R}^5$.
W_5 non è un sottospazio perché non contiene l'opposto di $t_1\underline{e}_1 + t_2\underline{e}_2$ quando $t_j > 0$.
W_6 non è un sottospazio perché, ad esempio, non contiene il vettore nullo di $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$ (la matrice nulla non è certo invertibile).

Esercizio 3. Sono dati i sottospazi $U \leq \mathbb{R}^4$ e $W \leq \mathbb{R}^4$:

$$U = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\}\,, \quad A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$$

1. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
2. Determinare equazioni cartesiane di W.
3. Determinare una base di U

Soluzione: Riducendo a scala A otteniamo con soli due passaggi la matrice $S = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
Questo ci fornisce immediatamente la dimensione di U, che è $4 - \mathrm{rg}\, A = 4 - 2 = 2$. Con qualche passaggio in più otteniamo anche una base di U (variabili dipendenti x_1 e x_2; variabili libere x_3 e x_4, etc etc); una base è, ad esempio: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}^T$ e $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}^T$.
Sia ora B la matrice 4×3 che ha come colonne i vettori generatori di W; una semplice riduzione a scala (di nuovo, 2 passaggi !) ci dice che B è riducibile tramite Gauss alla matrice

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ne segue che W ha dimensione 2 con base data, ad esempio, da due qualsiasi vettori fra i suoi tre generatori (quei vettori sono a due a due non proporzionali). Consideriamo ad esempio il primo e l'ultimo: per ottenere equazioni cartesiane di W applichiamo il solito metodo, riducendo a scala

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & -1 & x_4 \end{array} \right|$$

e imponendo la compatibilità. Otteniamo che $W = \{\underline{x} \,|\, C\underline{x} = \underline{0}\}$ con $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Per decidere se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ possiamo procedere, grazie a Grassmann, in due modi: risolviamo il sistema 4×4 dato dalle equazioni cartesiane (ridotte) di U e dalle equazioni cartesiane di W e scopriamo che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ (ne segue allora, per Grassmann, che $U + W$ ha dimensione $2 + 2 = 4$ ed è quindi $\mathbb{R}^4$; quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$). In alternativa consideriamo una base di U ed una base di W (abbiamo già trovato queste basi); otteniamo 4 vettori, li mettiamo nelle colonne di una matrice 4×4 e scopriamo che sono linearmente indipendenti; dato che sono un insieme di generatori per $U + W$ ne segue che sono una base per $U + W$. Quindi $U + W$ ha dimensione 4 e applicando Grassmann abbiamo allora che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ il che dimostra ancora una volta che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Verificare che L_A è una biezione. Determinare l'espressione in coordinate dell'applicazione inversa $(L_A)^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Soluzione: Una semplice riduzione a scala ci fa scoprire che A è non singolare e quindi che L_A è bigettiva e quindi invertibile. Da quanto visto a lezione l'applicazione inversa altri non è che $L_{A^{-1}}$. Per determinate l'espressione in coordinate di $L_{A^{-1}}$ basta allora calcolare l'inversa di A. Applicando il noto metodo (con Gauss a scendere e poi a salire) otteniamo che

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 4/3 & -7/3 & 5/3 \end{vmatrix}$$

Riassumendo:

$$(L_A)^{-1} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = L_{A^{-1}} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

che scriviamo direttamente a partire dall'espressione di A^{-1} appena trovata.

Esercizio 5. Sia $V = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Fissiamo una matrice invertibile A e sia $T : V \to V$ l'applicazione $T(X) = AXA$. Dimostrare che T è lineare. Stabilire se è iniettiva e/o suriettiva. (Suggerimento: per l'iniettività si faccia uso della matrice A^{-1}, che esiste per ipotesi.)

Soluzione: Notiamo che A, che è fissata, è necessariamente una matrice 2×2, altrimenti il prodotto AXA non avrebbe senso. Per verificare che T è lineare dobbiamo verificare che $T(X_1 + X_2) = T(X_1) + T(X_2)$ e $T(\lambda X) = \lambda T(X)$. Utilizzando le proprietà distributive del prodotto righe per colonne abbiamo subito

$$T(X_1 + X_2) \equiv A(X_1 + X_2)A = AX_1A + AX_2A = T(X_1) + T(X_2)\,.$$

Analogamente, per le ben note proprietà del prodotto righe per colonne, si ha

$$T(\lambda X) \equiv A(\lambda X)A = \lambda(AXA) = \lambda T(X)\,.$$

Quindi T è un endomorfismo di V. Vediamo se è iniettivo. Essendo lineare basta verificare che il nucleo è banale; ora

$$X \in \operatorname{Ker} T \leftrightarrow AXA = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Seguendo il suggerimento, moltiplichiamo a sinistra e a destra ambo i membri per A^{-1}. Denotando con O la matrice nulla, abbiamo allora $A^{-1}(AXA)A^{-1} = A^{-1}OA^{-1}$. Per la proprietà associativa del prodotto righe per colonne a sinistra c'è $(A^{-1}A)X(AA^{-1})$ e cioè I_2XI_2 che è X; a destra c'è ovviamente la matrice nulla O. Quindi X è il vettore nullo. Quindi T è iniettiva e dato che T va da V in se stesso, ne segue che è anche suriettiva.

Esercizio 6. Consideriamo l'applicazione lineare $T \equiv L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

1. Determinare una base per l'immagine di T.
2. Determinare (tramite una sua base) un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ che abbia dimensione 2 e con la proprietà che $T(U)$ abbia dimensione 1.

Soluzione: Una rapida riduzione a scala (2 passi) ci porta alla matrice

$$S = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Quindi A ha rango 2 ed una base di $\operatorname{Im} T$ è data, ad esempio, dalle prime due colonne della matrice. Osserviamo che il nucleo di T ha dimensione 2 ed è uguale a $\operatorname{Ker} S$. Per determinare il sottospazio U ragioniamo sul fatto che U deve avere intersezione di dimensione 1 con il nucleo. Vediamo i dettagli: se prendiamo $U = \operatorname{Span}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ con $\underline{u}_1 \in \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} S$ e $\underline{u}_2 \notin \operatorname{Ker} T$ allora $T(U)$, che è uguale allo $\operatorname{Span}(T(\underline{u}_1), T(\underline{u}_2))$, è uguale alla retta vettoriale generata da $T(\underline{u}_2) \neq \underline{0}$ ed ha quindi dimensione 1 come richiesto. Per determinare esplicitamente $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ risolviamo il sistema che dà $\operatorname{Ker} S$, trovando

$$\operatorname{Ker} S = \operatorname{Span}(\begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix})$$

(Di fatto non c' è bisogno di risolvere il sistema $S\underline{x} = \underline{0}$; basta scegliere un valore per le variabili libere, ad esempio $x_3 = 1$ e $x_4 = 0$ e trovare una soluzione del corrispondente sistema triangolare 2×2 nella variabili dipendenti x_1 e x_2.) Allora possiamo scegliere $\underline{u}_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}^T$; per scegliere $\underline{u}_2$ basta scegliere un vettore le cui coordinate *non* soddisfano le equazioni che danno $\operatorname{Ker} S$; ma $\operatorname{Ker} S$ è dato da $2x_1 - x_2 + x_4 = 0 = x_2 + x_3 + 2x_4$. Ad esempio $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^T$ non soddisfa la prima equazione e quindi *non* appartiene a $\operatorname{Ker} S = \operatorname{Ker} T$. Poniamo quindi $\underline{u}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^T$