Algebra 1

Prof. Paolo Piazza

Secondo Esonero

7 Giugno 2016

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

email istituzionale: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Sia A un anello commutativo unitario e $d \in A$ tale che $d^2 = d$. Poniamo $A_d := \{x \mid x \in A, \quad xd = 0_A\}$.

(a) Provare che A_d è un ideale di A.

(b) Determinare un ideale I di A ed un isomorfismo $f : A/A_d \longrightarrow I$.

(c) Dire se i precedenti asserti valgono nel caso in cui $d^2 \neq d$.

Soluzione:

Risposta:

(b) $f(a + A_d)=$ $\boxed{}$ (c) Vale (a) $\boxed{}$ (c) Vale (b) $\boxed{}$

Esercizio 2. Sia G un gruppo e $Z(G) := \{x \mid x \in G, \quad xy = yx \;\; \forall y \in G\}$ il centro di G (che sappiamo essere un sottogruppo normale di G). Se $G/Z(G)$ è ciclico, e $xZ(G)$ è un suo generatore, provare che G è abeliano.

Soluzione:

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}_5 := \mathbb{Z}/\equiv_5$, $f := x^2 + ax + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ e $I := (f)_{\mathbb{Z}_5[x]}$.

(a) Determinare per quali valori di a l'anello $\mathbb{Z}_5[x]/I$ ha divisori dello zero.

(b) Per ogni a determinare gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_5[x]/I$.

Soluzione:

Risposta: (a) $a = \boxed{}$

Esercizio 4. Dati i gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathcal{S}_5, \circ)$ (il gruppo simmetrico su 5 elementi) determinare per quali valori di n esiste un omomorfismo di gruppi $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{S}_5$ tale che $|f(\mathbb{Z})| = n$.

Soluzione:

Risposta:

$n = \boxed{}$

Esercizio 5. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{Z}[i]$, $I := \{a \mid a \in \mathbb{Z}[i], \quad ||a|| \equiv_2 0\}$.

(a) Provare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Dire se I è primo.

(c) Determinare $|\mathbb{Z}[i]/I|$.

Soluzione:

(b) I è primo $\boxed{}$ (c) $|\mathbb{Z}[i]/I| = \boxed{}$