Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Proff. K. O'Grady, P. Piazza
Prova scritta dell'11/11/02

Esercizio 1. Determinare se la seguente matrice 3×3 è invertibile, ed in caso affermativo calcolare la sua inversa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2. Determinare al variare del parametro t le soluzioni del sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (t-1)x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + tx_2 + tx_3 + tx_4 = t \\ tx_1 + 2(t-1)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = t^2 - 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$.

Esercizio 4. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \operatorname{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Esercizio 5. Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

e sia $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata. Determinare una base per $\operatorname{Ker}(F_A)$ ed una base per $\operatorname{Im}(F_A)$. Studiare iniettività e suriettività di F_A.

Esercizio 6. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ i vettori dati da

$$\underline{v}_1 = (1,2), \quad \underline{v}_2 = (1,-1).$$

Si noti che $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Sappiamo che esiste una e una sola applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$F(1,2) = (0,1), \quad F(1,-1) = (3,1).$$

Determinare la matrice $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ associata a F quando si sia scelta la base canonica come base di partenza e la base canonica come base di arrivo.