

Algebra 1
Prof. P. Piazza
Primo Esonero - Compito B

22 APRILE 2016

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:

- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

(a) $S := \{n \mid n \in \mathbb{R}, n = x^3 \text{ per qualche } x \in \mathbb{Z}\}$

(b) $T := \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 7^n 17^m \text{ per qualche } m, n \in \mathbb{N}\}$

(c) $U := \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{P})$, dove $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{P})$ denota le parti finite dell'insieme \mathbb{P} dei numeri primi.

(d) $V := \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^4 - y^4 \in \mathbb{Q}\}$

Soluzione:

Risposta:

(a) $\text{Card}(S) =$ (b) $\text{Card}(T) =$ (c) $\text{Card}(U) =$ (d) $\text{Card}(V) =$

Esercizio 2.

(a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, determinare $\text{MCD}(n, n^2 - n)$.

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che 11 non divida n verificare che $n^{10} - 10^{2n} \equiv 0 \pmod{11}$.

Soluzione:

Risposta:

(a) $\text{MCD}(n, n^2 - n) =$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e si consideri su $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ la seguente relazione ρ :

$$(x, y) \rho (x', y') \iff (x + y) \text{MCD}(x', y') = (x' + y') \text{MCD}(x, y).$$

- (a) Verificare che ρ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
- (b) Dimostrare che $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \rho$ è equipotente a $A := \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ determinando una biezione $\bar{f} : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \rho \rightarrow A$.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 4. Sia G un gruppo, $f : G \rightarrow G$ un endomorfismo di G e H un sottogruppo di G .

(a) Verificare che, per ogni $a, b \in G$ se $ab = ba$, allora $a^{-1}b = ba^{-1}$.

(b) Verificare che

$$K := \{x \mid x \in G, f(xh) = f(hx) \forall h \in H\}$$

è un sottogruppo di G .

(c) *Facoltativo.* Dire se vale che se H è normale in G allora K è normale in G .

Soluzione:

Esercizio 5.

(a). Semplificando il sistema attraverso l'utilizzo di metodi elementari, determinare per quali $a, b \in \mathbb{Z}$ esso ammette soluzioni:

$$\begin{cases} aX \equiv 4 \pmod{7} \\ 7^{690713}X \equiv b \pmod{14} \end{cases}$$

(b). Determinare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3^{3333303030333003030}X \equiv 4 \pmod{7} \\ 7X - 21 \equiv 7 \pmod{14} \end{cases}$$

Soluzione:

Risposta:

(a) Il sistema ammette soluzioni per: