

**ALGEBRA I: ESERCITAZIONE IN CLASSE del**  
**17 Aprile 2012**

**Esercizio 1.**

Ieri abbiamo visto che il resto della divisione per 7 di  $3^{302}$  è uguale a 2. Analogamente si può dimostrare che il resto della divisione per 5 e per 11 di  $3^{302}$  è uguale a 4 e 9 rispettivamente. Determinare il resto della divisione per 385 di  $3^{302}$ . (Suggerimento:  $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \dots$ )

**Esercizio 2.**

(2.1) Sia  $p > 2$  un primo. Dimostrare che  $\{x \in \mathbb{Z}_p : x^2 = 1\} = \{\pm \bar{1}\}$

(2.2) Sia  $n = pq$  prodotto di due primi  $p, q$  entrambi maggiori di due. Determinare il numero di elementi in  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{pq})$  tali che  $x^2 = \bar{1}$ .

**Esercizio 3.**

Utilizzando l'esercizio precedente determinare gli elementi in  $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$  tali che  $x^2 = \bar{1}$ .

**Esercizio 4.**

Si trovino tutte le soluzioni intere del sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 13^{190} & \text{mod } 35 \\ 4x \equiv 8 & \text{mod } 6 \end{cases}$$

**Esercizio 5.**

Un elemento  $a$  in un anello  $A$  è detto *nilpotente* se  $\exists n \in \mathbb{N}, n > 0$ , tale che  $a^n = 0$ .

(5.1) Sia  $A$  un anello commutativo. Verificare che la somma di due elementi nilpotenti è nilpotente.

(5.2) Determinare i nilpotenti di  $\mathbb{Z}_{60}$ . (Suggerimento  $\bar{x}$  è nilpotente se e solo se  $x$  è multiplo di...).

**Esercizio 6.**

Si dimostri, per induzione su  $N$ , che

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{N}.$$