

ALGEBRA I. Compito a casa del 14 Aprile 2012

Esercizio 1. Determinare, motivando la risposta, la cardinalità dell'insieme X nei seguenti casi:

- (i) $X = \{f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ iniettiva}\}$;
- (ii) $X = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid MCD(x, y) = 7\}$.

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione diofantea $aX + bY = c$ con $(a, b) = 1$. Sia (x_0, y_0) una soluzione particolare. Dimostrare che (x, y) è una soluzione se e solo se $(x, y) = (x_0, y_0) + (\tilde{x}, \tilde{y})$ con (\tilde{x}, \tilde{y}) una soluzione dell'equazione omogenea associata $aX + bY = 0$. Come si scrivono le soluzioni dell'equazione omogenea associata ?

Esercizio 3.

- (3.1) Determinare tutte le soluzioni intere di $168X + 540Y = -24$. (Osservare che si può dividere per 12.)
- (3.2) Determinare $z \in \mathbb{Z}$, $0 \leq z \leq 300$ tale che $168z \equiv 36 \pmod{540}$.
- (3.3) Determinare tutti gli $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{540}$ tali che $\overline{168x} = \overline{12}$.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione $\bar{x}^2 = \bar{1}$ in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$ e in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$.

Esercizio 5. Sia $\bar{y} = \overline{41^{35}}$ in \mathbb{Z}_{37} . Determinare \bar{y}^{-1} . *Suggerimento:* può essere utile utilizzare ϕ , la funzione di Eulero.

Esercizio 6. Determinare l'ultima cifra decimale del numero 19^{19} .

Esercizio 7.

- (7.1) Determinare il resto della divisione per 7 di 3^{302} .
- (7.2) Determinare il resto della divisione per 5 di $33213454^{27221447}$.

Esercizio 8.

Spiegare perché l'equazione $8X \equiv 3 \pmod{385}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 8X \equiv 3 \pmod{5} \\ 8X \equiv 3 \pmod{7} \\ 8X \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

Risolvere tale sistema.

Esercizio 9.

Determinare le ultime due cifre decimali di 1234^{4321} .