

ALGEBRA I: ESERCITAZIONE IN CLASSE del
12 Aprile 2011

Esercizio 1.

Ieri abbiamo visto che il resto della divisione per 7 di 3^{302} è uguale a 2. Analogamente si può dimostrare che il resto della divisione per 5 e per 11 di 3^{302} è uguale a 4 e 9 rispettivamente. Determinare il resto della divisione per 385 di 3^{302} . (Suggerimento: $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \dots$)

Esercizio 2.

(2.1) Sia $p > 2$ un primo. Dimostrare che $\{x \in \mathbb{Z}_p : x^2 = 1\} = \{\pm \bar{1}\}$

(2.2) Sia $n = pq$ prodotto di due primi p, q entrambi maggiori di due. Determinare il numero di elementi in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{pq})$ tali che $x^2 = \bar{1}$.

Esercizio 3.

Utilizzando l'esercizio precedente determinare gli elementi in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15})$ tali che $x^2 = \bar{1}$.

Esercizio 4.

Calcolare le ultime due cifre del numero 123^{123} .

Esercizio 5.

Un elemento a in un anello A è detto *nilpotente* se $\exists n \in \mathbb{N}, n > 0$, tale che $a^n = 0$.

(5.1) Sia A un anello commutativo. Verificare che la somma di due elementi nilpotenti è nilpotente.

(5.2) Determinare i nilpotenti di \mathbb{Z}_{60} . (Suggerimento \bar{x} è nilpotente se e solo se x è multiplo di...).

Esercizio 6.

Determinare il resto della divisione per 7 di $19^{19^{19}}$.