

ALGEBRA I: ESERCITAZIONE IN CLASSE del
11 Aprile 2011

Esercizio 1. Determinare, motivando la risposta, la cardinalità dell'insieme X nei seguenti casi:

- (i) $X = \{f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ iniettiva}\}$;
- (ii) $X = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid MCD(x, y) = 7\}$.

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione diofantea

$$aX + bY = 0 \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

e supponiamo che $(a, b) = 1$. Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di questa equazione omogenea è dato da $\{(-b\ell, a\ell) \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 3.

- (3.1) Determinare tutte le soluzioni intere di $168X + 540Y = -24$. (Osservare che si può dividere per 12.)
- (3.2) Determinare $z \in \mathbb{Z}$, $0 \leq z \leq 300$ tale che $168z \equiv 36 \pmod{540}$.
- (3.3) Determinare tutti gli $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{540}$ tali che $\overline{168x} = \overline{12}$.

Esercizio 4. Risolvere l'equazione $\bar{x}^2 = \bar{1}$ in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_5)$ e in $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})$.

Esercizio 5. Sia $\bar{x} = \overline{13^{35}}$ in \mathbb{Z}_{37} . Determinare \bar{x}^{-1} . Stesso esercizio per $\bar{y} = \overline{41^{35}}$

Suggerimento: può essere utile utilizzare ϕ , la funzione di Eulero.

Esercizio 6. Determinare l'ultima cifra decimale dei numeri

$$37^{37}, \quad 19^{19}.$$

Esercizio 7.

- (7.1) Determinare il resto della divisione per 7 di 3^{302} .
- (7.2) Determinare il resto della divisione per 5 di $33213454^{27221447}$.

Esercizio 8.

Risolvere, se possibile, il seguente sistema di equazioni congruenziali lineari

$$\begin{cases} 8X \equiv 3 \pmod{5} \\ 8X \equiv 3 \pmod{7} \\ 8X \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

Esercizio 9.

Determinare le ultime due cifre decimali di 1234^{4321} .