Algebra 1

Proff. P. Piazza, E. Spinelli

Quarto Esame

22 Settembre 2016

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Preferenza per l'orale (solo Piazza):

23 Settembre ore 9.30 ☐ 3 Ottobre ore 14.30 ☐

Esercizio 1. Determinare per quali valori di a e b il seguente sistema ha soluzioni (*non è richiesto di determinarle*)

$$\begin{cases} X \equiv 2a \mod 3 \\ bX \equiv 3 \mod 5 \\ X + 1 \equiv 3 \mod 6 \end{cases}$$

Soluzione:

Risposta:

a è tale che $\boxed{}$ b è tale che $\boxed{}$

Esercizio 2. Sia p un primo dispari e $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/\equiv_p$. Si consideri l'ideale I dell'anello dei polinomi $\mathbb{Z}_p[x]$ generato dal polinomio x^2+1, $I := (x^2+1)_{\mathbb{Z}_p[x]}$, e l'anello quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/I$.

(a) Dimostrare che se p **non** è congruo a 1 modulo 4 allora $\mathbb{Z}_p[x]/I$ è un campo.

(b) Sotto le stesse ipotesi di (a) determinare l'ordine del gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_p[x]/I$.

Soluzione:

Esercizio 3. Sia G un gruppo abeliano e si ponga

$$T(G) := \{x \mid x \in G, \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; x^n = 1_G\}.$$

(a) Provare che $T(G) \leq G$;

(b) dimostrare che ogni elemento di $G/T(G)$ diverso dall'identità ha ordine infinito.

Soluzione:

Esercizio 4. Sia G un gruppo abeliano di ordine $m \in \mathbb{N}$ e sia $n \geq 1$ tale che $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$. Provare che la funzione

$$f : G \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto x^n$$

è un automorfismo di G.

Soluzione:

Esercizio 5. Un ideale $H \neq A$ di un anello commutativo A si dice *primario* se per ogni coppia di elementi $(a, b) \in A \times A$ tali che $ab \in H$ e $a \notin H$ esiste un intero positivo n tale che $b^n \in H$, mentre un elemento $a \in A$ è *nilpotente* se esiste $n \geq 1$ tale che $a^n = 0_A$.

Se A è unitario e $H \neq A$ è un ideale di A si provi che H è primario se, e solo se, nell'anello quoziente A/H ogni divisore dello zero è nilpotente.

Soluzione: