Geometria

Prof P. Piazza

Primo esame scritto. Soluzioni.

30 Gennaio 2013

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6+2	
2	6	
3	6	
4	6+2	
5	6+1	
Totale	30+5=35	

ATTENZIONE : GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI !

Esercizio 1. Sia $L_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l' endomorfismo definito dalla matrice $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ e consideriamo le due basi

$$\mathcal{B} = \{\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}\}, \qquad \mathcal{C} = \{\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}\}.$$

- Determinare la matrice A associata a L_C rispetto alla base $\mathcal{B}$ (quindi base di partenza = base di arrivo = $\mathcal{B}$).
- **Facoltativo:** determinare la matrice P del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Soluzione:
Per questioni tipografiche poniamo $F := L_C$. La matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è proprio C; in formule

$$M_{\text{can.}}^{\text{can.}}(F) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Dunque la matrice A richiesta è

$$\begin{aligned} A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) &= M_{\text{can.}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}) \cdot M_{\text{can.}}^{\text{can.}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\text{can.}}(\text{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{B}}^{\text{can.}}(\text{Id}))^{-1} \cdot M_{\text{can.}}^{\text{can.}}(F) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\text{can.}}(\text{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -3/2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ed infatti

$$F(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix};$$

$$F(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

La matrice P del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è

$$\begin{aligned} P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}) &= M_{\text{can.}}^{\mathcal{B}}(\text{Id}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\text{can.}}(\text{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{B}}^{\text{can.}}(\text{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{C}}^{\text{can.}}(\text{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 2. Spazio euclideo con riferimento cartesiano $RC(O\,\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z). Determinare l' equazione cartesiana del piano π contenente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (1, 0, 3)$. Calcolare la distanza di π dall'origine O (aiutatevi con una figura, il piano π si disegna molto facilmente).

Soluzione: Cominciamo col determinare equazioni cartesiane per la retta r. Dalle equazioni parametriche di r si ha che $(x, y, z) \in r$ se e solo se $(x-1, y, z-2)$ è linearmente dipendente dal vettore $(1, -1, 2)$, ovvero se e solo se

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y \\ 2 & z-2 \end{vmatrix} = 1$$

Mediante eliminazione gaussiana oppure tramite il teorema degli orlati otteniamo le equazioni cartesiane per r, che sono

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}$$

Il fascio dei piani contenenti r è

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x + y - 1) + \beta(z - 2x) = 0.$$

Imponendo il passaggio per $P = (1, 0, 3)$ otteniamo $\beta = 0$ e dunque $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ a meno di un fattore scalare. Ne segue che un'equazione cartesiana per π è

$$\pi : x + y - 1 = 0$$

La distanza di questo piano dall'origine è uguale alla lunghezza del segmento che unisce l'origine alla sua proiezione ortogonale sul piano. Un semplice ragionamento dimostra che questa proiezione è il punto di coordinate $(1/2, 1/2, 0)$. Quindi la distanza cercata è la distanza di $(1/2, 1/2, 0)$ da O che è uguale a è

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1/\sqrt{2}\,.$$

Esercizio 3. Sia $V := M_{22}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici due per due a coefficienti reali. Sia T l' applicazione lineare che porta una matrice A nella sua trasposta.
Calcolare gli autovalori di T. Determinare gli autospazi associati. Stabilire se T è diagonalizzabile.
Suggerimento: scrivere la matrice associata a T nella base canonica di V costituita dalle matrici

$$E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad E_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad E_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad E_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soluzione: Se scriviamo $A = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$, allora

$$T(\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}$$

Quest'applicazione è rappresentata, rispetto alla base di cui nel suggerimento, dalla matrice 4×4

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di M è

$$p_M(t) = \det \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^3(t+1)$$

Dunque gli autovalori di T sono $t = 1$ con molteplicità algebrica 3, e $t = -1$ con molteplictà algebrica 1. Determiniamo una base per ogni autospazio. L'1-autospazio di T è $\ker(T - \mathrm{Id})$ ed è dato dalle matrici le cui coordinate (x, y, z, w) rispetto alla base $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sono soluzioni del sistema

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Questo sistema ha soluzioni date dalle quadruple

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$$

al variare di α, β e γ in $\mathbb{R}$. L'1-autospazio ha pertanto dimensione 3, ed una base è data da

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

[1] Veniamo ora al (-1)-autospazio di T. Si tratta del sottospazio $\ker(T + \mathrm{Id})$ dato dalle matrici le cui coordinate rispetto alla base $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ soddisfano il sistema

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

[1] Stiamo dicendo che lo spazio delle matrici 2×2 che coincidono con la loro trasposta (matrici simmetriche) è lo spazio di dimensione 3 delle matrici della forma

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

e che una sua base è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ovvero da

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il (-1)-autospazio ha pertanto dimensione 1, ed una base è data da

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

[2] Osserviamo che il polinomio caratteristico di T ha tutte radici reali e che per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica: l'applicazione lineare $T\colon M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ è quindi diagonalizzabile.

[2]Stiamo dicendo che lo spazio delle matrici 2×2 che coincidono con l'opposto della loro trasposta (matrici antisimmetriche) è lo spazio di dimensione 1 delle matrici della forma

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

e che una sua base è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 4. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico. Coordinate (x, y, z) associate alla base canonica.
Sono dati i piani

$$\alpha_1 : x + y - z = 0 \qquad \alpha_2 : x + y + z = 0$$

Siano S_1, S_2 le simmetrie ortogonali rispetto ad α_1, α_2 rispettivamente.

1. Scrivere la matrice $A_j$associata ad S_j, $j = 1, 2$, nella base canonica.
2. Scrivere la matrice D associata a $T := S_1 \circ S_2$ nella base canonica.
3. **Facoltativo:** verificare che il piano $\pi : x - y = 0$ è invariante per T ma non contiene alcun autovettore di T.

Soluzione: Sappiamo che $(\alpha_1)^\perp = \mathbb{R}(1, 1, -1) \equiv \mathbb{R}\underline{u}_1$ e $(\alpha_2)^\perp = \mathbb{R}(1, 1, 1) = \mathbb{R}\underline{u}_2$. Sappiamo anche che la simmetria ortogonale rispetto a α_j è uguale a $\mathrm{Id} - 2P_j$, con P_j la proiezione ortogonale sulla retta $(\alpha_j)^\perp$. Sappiamo, infine, che

$$P_j \underline{v} = \frac{< \underline{v}, \underline{u}_j >}{< \underline{u}_j, \underline{u}_j >} \underline{u}_j$$

e calcolando i trasformati dei vettori della base canonica otteniamo:

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che

$$D = A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -8 & 4 \\ -8 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & -7 \end{vmatrix}$$

Una base per π è data fa $\underline{f}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{f}_2 = (0, 0, 1)$. Si ha

$$T\underline{f}_1 = \frac{1}{9}(-7, -7, -8) \qquad T\underline{f}_2 = \frac{1}{9}(4, 4, -7) \; ;$$

entrambi questi vettori appartengono a π che è quindi invariante per T. Con l'usuale procedimento si calcola la matrice associata a $T|_\pi$ nella base $\underline{f}_1 = (1, 1, 0)$ e $\underline{f}_2 = (0, 0, 1)$; è la matrice

$$\frac{1}{9} \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{vmatrix}$$

che *non* ammette autovalori reali. Ne segue che non ci sono autovettori per T in π.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, con base canonica $\{\underline{e}_1\ \underline{e}_2\}$ fissata e coordinate associate (x_1, x_2). È data la forma bilineare

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = 2x_1y_1 - \sqrt{3}x_1y_2 - \sqrt{3}x_2y_1\,.$$

- Stabilire se b è non-degenere.
- Determinare indice di positività ed indice di negatività di b
- **Facoltativo:** determinare una base $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ con la proprietà che la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base $\mathcal{F}$ sia nella forma diagonale di Sylvester.

Soluzione:
La matrice associata a b nella base canonica è la matrice

$$A_b^{\rm can} \equiv A = \left| \begin{array}{cc} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{array} \right|.$$

Dato che questa matrice ha rango 2 ne segue che b è non-degenere.
Sappiamo che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza $b(\ ,\ )$; una tale base è ottenuta, ad esempio, applicando il teorema spettrale all'operatore simmetrico S che ha come matrice associata nella base canonica la matrice (simmetrica) associata alla forma bilineare $b(\ ,\ )$; in formule $S := L_A$. Gli autovalori di S sono, come subito si verifica, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Ciò è già sufficiente per scrivere la forma canonica di Silvester della forma bilineare, che è

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right|.$$

e determinare l'indice di positività, che è 1, e l' indice di negatività, che è anche 1.
Vediamo i dettagli, ripetendo un pó di teoria:
consideriamo la base $\mathcal{W} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ costituita da una base *ortonormale* di autovettori di S associati a λ_1, λ_2 rispettivamente. Sappiamo che questa base diagonalizza simultaneamente la forma b e l'operatore S. I vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ si determinano calcolando gli autospazi V_3 e V_{-1} (ma non è necessario trovare la loro espressione esplicita per rispondere alla seconda domanda). La matrice diagonale associata a b in questa base è

$$A_b^{\mathcal{W}} = \left| \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right|.$$

Se definiamo $\underline{f}_1 = \underline{w}_1/\sqrt{3}$ e $\underline{f}_2 = \underline{w}_2$ e $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ allora otteniamo la matrice associata a b nella sua forma di Sylvester

$$A_b^{\mathcal{F}} = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right|.$$

Quindi b ha indice di positività 1 e indice di negatività 1. La base $\mathcal{W}$ si determina calcolando V_3 e ricordando che V_{-1} è la retta ortogonale a V_3 (autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali per un operatore simmetrico). Un semplice calcolo mostra che $V_3 = \mathbb{R}(\sqrt{3}/2, 1/2)$ e quindi $V_{-1} = (\mathbb{R}(\sqrt{3}/2, 1/2))^{\perp} = \mathbb{R}(-1/2, \sqrt{3}/2)$. La soluzione è completa.