

Algebra 1
Proff. P. Piazza, E. Spinelli
Terzo Esame

9 SETTEMBRE 2016

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:

- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Orale:

I Settembre

II Settembre

Esercizio 1. Dimostrare che

- (a) per ogni $n \in \mathbb{N}$, 4 divide $(-1)^n(2n + 1) - 1$;
- (b) se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $m := 10a + b$, allora 7 divide m se, e solo se, $4a \equiv_7 b$;
- (c) per ogni $n \in \mathbb{N}$, 11 divide $n^{12} - n^2$.

Soluzione:

Esercizio 2. Sia G un gruppo, $H \trianglelefteq G$ e $K \leq G$ tali che $G = HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. Provare che

(a) $H \cap K \trianglelefteq K$;

(b) se H è abeliano, $H \cap K \trianglelefteq G$.

Soluzione:

Esercizio 3. Sia G un gruppo abeliano, $n \in \mathbb{N}$ e si ponga

$$G^n := \{x^n \mid x \in G\}, \quad G_n := \{x \mid x \in G, x^n = 1_G\}.$$

Provare che

- (a) G^n e G_n sono sottogruppi di G ;
- (b) G/G_n è isomorfo a G^n .

Soluzione:

Esercizio 4. Sia A un anello commutativo unitario finito. Provare che ogni $x \in A \setminus \{0_A\}$ che non è un divisore dello zero è invertibile (*Suggerimento: si consideri per ogni $x \neq 0_A$ la funzione $f_x : A \rightarrow A$ tale che $f_x(y) = xy$*).

Soluzione:

Esercizio 5. Se $n \in \mathbb{N}$, si ponga $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\equiv_n$. Determinare per quali valori di $n \in \mathbb{P}$ il $\text{mcd}(x^2 + x + 1, x^4 + 3x^3 + x^2 + 7x + 5)$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n[x]$.

Soluzione: