Algebra 1

Proff. P. Piazza, E. Spinelli

Secondo Esame

21 Luglio 2016

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Orale:

Luglio ☐ I Settembre ☐ II Settembre ☐

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{N}$. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la relazione ρ così definita:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z} \qquad a\rho b \iff 3k \mid a + 2b + 3ab.$$

Determinare per quali valori di k

(a) ρ è riflessiva;

(b) ρ è d'equivalenza.

Soluzione: (a) Se ρ è riflessiva deve essere $1\rho 1$, ovvero $3k$ deve dividere $1+2+3=6$. Quindi può essere soltanto $k=1$ o $k=2$.

Sia $a \in \mathbb{Z}$. Allora $a + 2a + 3a^2 = 3a(a+1)$. Consideriamo $k=1$; sicuramente 3 divide $3a(a+1)$. Sia $k=2$; anche 6 divide $3a(a+1)$ in quanto o a o $a+1$ è un numero pari. In conclusione, per $k \in \{1,2\}$ si ha che $a\rho a$ per ogni intero a, ovvero che ρ è riflessiva.

(b) Per il punto (a) bisogna studiare che succede per $k \in \{1,2\}$.

Assumiamo che $k=1$ e siano $a, b \in \mathbb{Z}$. Vale che

$$a\rho b \iff 3 \mid a + 2b + 3ab \iff a + 2b + 3ab \equiv_3 0 \iff a + 2b \equiv_3 0 \iff a \equiv_3 -2b \iff a \equiv_3 b.$$

Pertanto $\rho = \equiv_3$ e quindi è una relazione di equivalenza.

Infine, se $k=2$ osserviamo che $0\rho 3$, ma non è vero il viceversa. Dunque ρ non è simmetrica e quindi di equivalenza.

Risposta:

(a) ρ è riflessiva per $k \in$ $\boxed{}$ (b) ρ è d'equivalenza per $k \in$ $\boxed{}$

Esercizio 2. Si ponga $a_1 := 2$ e, per ogni $n \geq 1$,

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n.$$

Provare che, per ogni $i, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $i \neq k$ allora $\mathrm{mcd}(a_i, a_k) = 1$.

Soluzione: Siano $i, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $i \neq k$. Senza perdere di generalità, possiamo suppore che $k > i$ ovvero che $k = i + r$ per qualche intero positivo r. Utilizzando la formula ricorrente si ha che

$$a_k - 1 = a_{k-1}^2 - a_{k-1} = a_{k-1}(a_{k-1} - 1) = a_{k-1}a_{k-2}(a_{k-2} - 1) = \ldots = a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_i(a_i - 1).$$

Sia $d := \mathrm{mcd}(a_i, a_k)$. Per definizione d divide a_i ed a_k. Quindi d divide anche $a_{k-1}a_{k-2} \cdots a_i(a_i - 1) = a_k - 1$ e, di conseguenza, $a_k - (a_k - 1) = 1$. Pertanto $d = 1$.

Esercizio 3. Sia G un gruppo e si ponga, per ogni $x, y \in G$,

$$(x, y) := x^{-1}y^{-1}xy.$$

Provare che

(a) $G' := \langle (x, y) \,|\, x, y \in G \rangle$ è un sottogruppo normale di G;

(b) se $N \trianglelefteq G$ vale che G/N è abeliano se, e solo se, $G' \subseteq N$.

Soluzione: (a) Bisogna verificare che, per ogni $\alpha \in G'$ e $g \in G$, $\alpha^g := g^{-1}\alpha g \in G'$. A tal fine, osserviamo che ogni elemento di G' è prodotto di un numero finito di commutatori o inversi di essi. Ma l'inverso di un commutatore è ancora un commutatore (infatti, per ogni $x, y \in G$, $(x, y)^{-1} = (y, x)$). Infine, se $a, b \in G$, si ha che $(ab)^g = a^g b^g$. In virtù di questo, è sufficiente provare che, per ogni $x, y, g \in G$,

$$(x, y)^g \in G'.$$

Siano $x, y, g \in G$. Allora

$$(x, y)^g = g^{-1}x^{-1}y^{-1}xyg = (g^{-1}x^{-1}g)(g^{-1}y^{-1}g)(g^{-1}xg)(g^{-1}yg) = (x^g, y^g) \in G'.$$

(b) Sia $N \trianglelefteq G$. Vale che

$$\begin{aligned} G/N \text{ è abeliano} &\iff \forall xN, yN \in G/N \quad (xN, yN) = N \iff \forall xN, yN \in G/N \quad (x, y)N = N \\ &\iff \forall x, y \in G \quad (x, y) \in N \iff G' \subseteq N. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia G un gruppo e $H \leq G$. Si ponga

$$N_G(H) := \{x \,|\, x \in G,\ Hx = xH\}, \qquad C_G(H) := \{x \,|\, x \in G,\ hx = xh \quad \forall h \in H\}.$$

Provare che

(a) $N_G(H) \leq G$;

(b) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$;

(c) esiste $K \leq \mathrm{Aut}(H)$ tale che $N_G(H)/C_G(H)$ è isomorfo a K.

Soluzione: (a) $N_G(H)$ è non-vuoto perchè $1_G \in N_G(H)$.

Sia ora $x \in N_G(H)$. Allora $Hx = xH$, ovvero $Hxx^{-1} = H = xHx^{-1}$, e quindi $x^{-1}H = Hx^{-1}$. Pertanto $x^{-1} \in N_G(H)$.

Infine, sia $y \in N_G(H)$. Vale che

$$H(xy) = (Hx)y = x(Hy) = (xy)H.$$

Dunque anche $xy \in N_G(H)$, e questo prova quanto desiderato.

(b)-(c) Ovviamente $H \trianglelefteq N_G(H)$, quindi per ogni $x \in N_G(H)$ l'applicazione

$$\phi_x : H \longrightarrow H, \qquad h \longmapsto xhx^{-1}$$

è un automorfismo di H.

Sia

$$f : N_G(H) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H), \qquad x \longmapsto \phi_x.$$

Se $x, y \in N_G(H)$ e $h \in H$,

$$f(xy)(h) = \phi_{xy}(h) = xyh(xy)^{-1} = x(yhy^{-1})x^{-1} = x\phi_y(h)x^{-1} = \phi_x \circ \phi_y(h).$$

Pertanto f è un omomorfismo di gruppi. Inoltre, se $x \in N_G(H)$

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker} f &\iff f(x) = \mathrm{id}_H \iff \forall h \in H \quad f(x)(h) = xhx^{-1} = h \\ &\iff \forall h \in H \quad xh = hx \iff x \in C_G(H). \end{aligned}$$

Segue che $\mathrm{Ker} f = C_G(H)$ e quindi è un sottogruppo normale di $N_G(H)$. Infine, per il Teorema di omomorfismo per gruppi, si ha che $N_G(H)/C_G(H) \cong f(N_G(H)) \leq \mathrm{Aut}(H)$.

Esercizio 5. Determinare

(a) l'inverso di $x^3 + x^2 - x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)_{\mathbb{Q}[x]}$;

(b) gli ideali massimali di $\mathbb{R}[x]/(x^4-1)_{\mathbb{R}[x]}$.

Soluzione: (a) Vale che $x^3 + x^2 - x + 2 = (x^2+1)(x+1) - 2x + 1 = -2x + 1 \pmod{(x^2+1)}$. Inoltre

$$x^2 + 1 = (-2x+1)\Big(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\Big) + \frac{5}{4},$$

quindi l'inverso cercato è $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

(b) Posto $I := (x^4-1)_{\mathbb{R}[x]}$, gli ideali dell'anello $\mathbb{R}[x]/I$ sono tutti e soli quelli della forma H/I dove H è un ideale di $\mathbb{R}[x]$ che contiene I. Poichè $\mathbb{R}[x]$ è un DIP, gli ideali H sono quelli generati dai divisori di $x^4 - 1$. In particolare, gli ideali massimali sono quelli tali che H sia generato da un divisore irriducibile di $x^4 - 1$, e quindi

$$(x-1)_{\mathbb{R}[x]}/I, \qquad (x+1)_{\mathbb{R}[x]}/I, \qquad (x^2+1)_{\mathbb{R}[x]}/I.$$

(a) L'inverso di $x^3 + x^2 - x + 2$ è $\boxed{}$ (b) Gli ideali massimali sono $\boxed{}$