Geometria 1. Anno Accademico 99-00. Gruppo A-L
Esame del 25/2/00

Esercizio 1. Spazio affine A^3. Riferimento canonico con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per il punto $Q(1, 1, 1)$ e parallela alla retta s di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Spazio euclideo E^3. Riferimento cartesiano canonico con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane per il piano π contenente la retta s di cui nell'Esercizio 1 ed ortogonale al piano σ di equazione cartesiana $2x + 3y - z + 47 = 0$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $F_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ l'operatore definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se l'operatore F_A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(4.1) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio immagine. Determinarne una base ortogonale.

(4.2) Dire se l'operatore F_A è iniettivo. Dire se è unitario.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore definito da

$$F(1, 1) = (2, 1) \quad F(1, -1) = (-2, 1).$$

(5.1) Spiegare perché l'operatore F è univocamente determinato dalle condizioni date.

(5.2) Determinare la matrice associata ad F nella base $\underline{e}$.

Esercizio 6. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Siano F_A ed F_B gli operatori in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ definiti rispettivamente dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che F_B è invertibile. Determinare la matrice associata all'operatore $F_A \circ (F_B)^{-1}$ nella base $\underline{e}$.

Esercizio 7. Spazio euclideo E^2 con riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate (x,y). È data la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$$

(7.1) Verificare che $\mathcal{C}$ è un' ellisse non degenere.
(7.2) Ridurre a forma canonica euclidea la conica $\mathcal{C}$.
(7.3) **Facoltativo.** Determinare le coordinate dei fuochi e disegnare la conica (tutto nel riferimento $O\underline{e}_1\underline{e}_2$).

Esercizio 8. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico $\bullet$. Base canonica $\underline{e}$ di $\mathbb{R}^4$ fissata con coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4).
Sia σ il piano di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\underline{v}_1 = (1,0,1,0)$, $\underline{v}_2 = (0,1,-1,0)$.
(8.1) Verificare che il vettore $\underline{v}_3 = (1,-1,-1,0)$ appartiene a $\sigma^\perp$. Determinare equazioni cartesiane per $\sigma^\perp$. **Facoltativo**: determinare equazioni cartesiane per σ.
(8.2) Determinare una base *ortogonale* $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ verificante le seguenti proprietà
(i) $\underline{f}_1\,, \underline{f}_2\, \in \sigma$; $\underline{f}_3\,, \underline{f}_4\, \in \sigma^\perp$.
(ii) $\underline{f}_1$ è parallelo a $\underline{v}_1$ e di verso concorde, $\underline{f}_3$ è parallelo a $\underline{v}_3$ e di verso concorde.
(8.3) Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è associata nella base canonica $\underline{e}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su σ.
(8.4) Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore S di simmetria ortogonale rispetto a σ.
(8.5) Sia τ il piano di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^1 + 2x^2 - x^3 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

Verificare che τ è invariante rispetto a P e rispetto a S. (Suggerimento: il piano τ è generato da due vettori della base $\underline{f}$...)
(8.6) Verificare che la coppia ordinata di vettori $\{\underline{u} = (2,-1,0,0), \underline{w} = (0,1,2,0)\}$ costituisce una base di τ. Scrivere la matrice associata alla restrizione $S|_\tau$ in questa base di τ.
(8.7) **Facoltativo.** Definiamo un prodotto scalare $<\,,\,>$ in τ dichiarando la base $\{\underline{u} = (2,-1,0,0), \underline{w} = (0,1,2,0)\}$ *ortonormale* ed estendendo per linearità. Determinare la lunghezza del vettore $\underline{g} = (4,-1,2,0)$ di τ rispetto a tale prodotto scalare. Dire se $S|_\tau$ è unitario rispetto a tale prodotto scalare.