Geometria
Appello I — Sessione Estiva
Corso di laurea in Fisica — a.a. 2020/2021
Tutti i Canali

DURATA: 1 ORE E 30 MINUTI

Paolo Bravi, Simone Diverio, Paolo Piazza,
Paolo Piccinni, Riccardo Salvati Manni, Ernesto Spinelli

22 giugno 2021

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[t]$ dei polinomi $p(t) = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ di grado minore o uguale a 3, a coefficienti reali. Siano U e W i seguenti sottospazi vettoriali.

$$U = \mathrm{Span}\{t^3 + 2t^2 - 2t,\ t^2 - t + 1\},$$
$$W = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(-1) = p'(-1) = 0\}.$$

(i) Determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

(ii) Determinare equazioni cartesiane (nelle coordinate a_0, a_1, a_2, a_3) per la somma $U + W$.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico e coordinate (x, y, z). Sia U il sottospazio di equazione $x + y - 2z = 0$.

(i) Determinare una base del complemento ortogonale $U^\perp$.

(ii) Scrivere l'espressione in coordinate della proiezione ortogonale su U, $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

(iii) e della proiezione ortogonale su $U^\perp$, $p_{U^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia A la matrice seguente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

i) Mostrare che A è una matrice ortogonale.

ii) Determinare una base *unitaria* di $\mathbb{C}^2$ formata da autovettori di A.