

Algebra 1
Proff. P. Piazza, E. Spinelli
Secondo Esame

21 LUGLIO 2016

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:

- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Orale:

Luglio I Settembre II Settembre

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{N}$. Si consideri su \mathbb{Z} la relazione ρ così definita:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a\rho b \iff 3k \mid a + 2b + 3ab.$$

Determinare per quali valori di k

- (a) ρ è riflessiva;
- (b) ρ è d'equivalenza.

Soluzione:

Risposta:

(a) ρ è riflessiva per $k \in$ (b) ρ è d'equivalenza per $k \in$

Esercizio 2. Si ponga $a_1 := 2$ e, per ogni $n \geq 1$,

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - a_n.$$

Provare che, per ogni $i, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $i \neq k$ allora $\text{mcd}(a_i, a_k) = 1$.

Soluzione:

Esercizio 3. Sia G un gruppo e si ponga, per ogni $x, y \in G$

$$(x, y) := x^{-1}y^{-1}xy.$$

Provare che

- (a) $G' := \langle (x, y) \mid x, y \in G \rangle$ è un sottogruppo normale di G ;
- (b) se $N \trianglelefteq G$ vale che G/N è abeliano se, e solo se, $G' \subseteq N$.

Soluzione:

Esercizio 4. Sia G un gruppo e $H \leq G$. Si ponga

$$N_G(H) := \{x \mid x \in G, Hx = xH\}, \quad C_G(H) := \{x \mid x \in G, hx = xh \quad \forall h \in H\}.$$

Provare che

- (a) $N_G(H) \leq G$;
- (b) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$;
- (c) esiste $K \leq \text{Aut}(H)$ tale che $N_G(H)/C_G(H)$ è isomorfo a K .

Soluzione:

Esercizio 5. Determinare

- (a) l'inverso di $x^3 + x^2 - x + 2$ in $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)_{\mathbb{Q}[x]}$;
- (b) gli ideali massimali di $\mathbb{R}[x]/(x^4 - 1)_{\mathbb{R}[x]}$.

Soluzione:

(a) L'inverso di $x^3 + x^2 - x + 2$ è (b) Gli ideali massimali sono