Geometria 1. Anno Accademico 99-00. Gruppo A-L
Esame del 19-9-2000

Esercizio 1. Spazio euclideo E^3. Riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2\,\underline{e}_3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione cartesiana $x - y = 0$.

Esercizio 2. Piano euclideo E^2 con riferimento cartesiano canonico fissato e coordinate associate (x, y). Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2x - 2\sqrt{3}y = 0$$

(2.1) Scrivere la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ e verificare che $\mathcal{C}$ è non degenere.
(2.2) Determinare la forma canonica euclidea della conica verificando così che $\mathcal{C}$ è una parabola.

Esercizio 3. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\,\underline{e}_3\}$ fissata.
(3.1) Determinare la matrice associata nella base canonica $\underline{e}$ all'operatore P di proiezione ortogonale sulla retta $\mathbb{R}(1, 0, 1)$.
(3.2) Determinare l' equazione cartesiana del piano $(\mathbb{R}(1, 0, 1))^{\perp}$
(3.3) Sia P' l'operatore di proiezione ortogonale su tale piano; determinare la matrice associata a P' nella base $\underline{e}$.

Esercizio 4. Spazio affine A^4. Riferimento canonico con coordinate associate (X^1, X^2, X^3, X^4). Determinare equazioni parametriche e cartesiane per la retta affine r passante per i punti $P(1, 1, 0, 2)$ e $Q(0, 1, 0, 1)$. Determinare le equazioni cartesiane della retta s parallela ad r e passante per il punto $R(1, 1, 1, 1)$.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore che ammette la retta $\mathbb{R}(1, 2)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e la retta $\mathbb{R}(1, -1)$ come nucleo.
(5.1) Spiegare perché l'operatore F è univocamente determinato dalle condizioni date.
(5.2) Determinare la matrice associata ad F nella base $\underline{e}$.

Esercizio 6. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\,\underline{e}_3\}$. Fissiamo il vettore $\underline{w} = (1, -1, 0)$ e consideriamo l'applicazione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $F(\underline{v}) = \underline{w} \wedge \underline{v}, \quad \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Le proprietà del prodotto vettoriale implicano che $F \in \mathrm{End}\mathbb{R}^3$.
(6.1) Determinare $M_{\underline{e}}(F)$.
(6.2) Determinare equazioni cartesiane per il nucleo e per l'immagine di F.
(6.3) *Facoltativo*: Dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Consideriamo i vettori

$$\underline{w}_1 = (1,0,0,0)\,,\ \ \underline{w}_2 = (1,1,0,0)\,,\ \ \underline{w}_3 = (0,0,1,0)\,, \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\,.$$

(7.1) Verificare che questi vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. Determinare le coordinate dei vettori della base canonica rispetto a questa nuova base.

Sia $b(\,,\,)$ la forma bilineare simmetrica definita dalle relazioni

$$\begin{aligned}&b(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = 0 \ \text{ se } \ i \neq j\\ &b(\underline{w}_1, \underline{w}_1) = 1\,,\ \ b(\underline{w}_2, \underline{w}_2) = 1\,,\ \ b(\underline{w}_3, \underline{w}_3) = -1\,,\ \ b(\underline{w}_4, \underline{w}_4) = -2\end{aligned}$$

(7.2) Spiegare perchè $b(\,,\,)$ è univocamente determinata dalle relazione date.

(7.3) Dire se $b(\,,\,)$ è non degenere.

(7.4) Determinare una base $\underline{f}$ di $\mathbb{R}^4$ nella quale la matrice associata a $b(\,,\,)$ assuma la forma canonica di Sylvester

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

determinando inoltre, nel nostro caso particolare, p, r e la segnatura di $b(\,,\,)$.

(7.5) Determinare la matrice associata a $b(\,,\,)$ nella base canonica.

Esercizio 8. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $F_A \in \mathrm{End}\mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8.1) Verificare che la terza e la quarta colonna sono entrambe combinazioni lineari della prima e seconda colonna.

(8.2) Determinare le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}F_A$.

(8.3) Determinare la dimensione del nucleo di F_A.

(8.4) Determinare la dimensione di $(\mathrm{Im}F_A)^\perp$ e le sue equazioni cartesiane.

(8.5) Verificare che il piano σ generato dai vettori $\underline{f}_1 = (1,1,0,1)$ e $\underline{f}_2 = (1,2,1,2)$ è invariante per F_A.

(8.6) Determinare la matrice associata alla restrizione di F_A al piano σ nella base $\underline{f}$. Dire se tale restrizione è diagonalizzabile.