Algebra Lineare. a.a. 2004-05
Esame del 18 Gennaio 2005

Esercizio 1. Verificare che l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 10 \end{vmatrix};$$

è diagonalizzabile; determinare esplicitamente una base di autovettori. Determinare la matrice associata a F_A in tale base di autovettori.

Esercizio 2. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Consideriamo le due seguenti basi

$$\mathcal{G} := \{\underline{g}_1 = (1,1)\,, \underline{g}_2 = (-1,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} := \{\underline{h}_1 = (0,2)\,, \underline{h}_2 = (2,0)\}$$

2.1 Determinare le matrici di cambiamento di base, da $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ e da $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G}$.
2.2 Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$F(\underline{g}_1) = 2\underline{g}_1 - \underline{g}_2\,, \qquad F(\underline{g}_2) = \underline{g}_2\,.$$

Spiegare perché F è ben definita. Determinare la matrice associata a F nella base $\{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}$.

Esercizio 3. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con riferimento $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z). Determinare la distanza fra il punto $P = (1, 2, -1)$ e la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + 3z + 6 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Spazio affine $\mathcal{A}^3$ con riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ fissato e coordinate associate (x, y, z). Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per la retta di equazione parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

e parallelo alla retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + 3z + 6 = 0 \\ x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Studiare, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} t\,x + y + z = 1 \\ x + t\,y + z = 2 - t \\ x + y + t\,z = t \end{cases}$$

(non si chiede di determinare esplicitamente le soluzioni del sistema).

Esercizio 6. Dimostrare che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ è somma diretta di

$$U := \{(x, y, z) : x - z = 0\} \quad \text{e} \quad W := \mathrm{Span}\{(1, 1, 0)\}$$