Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Prof. P. Piazza
Esame del 14 Gennaio 2003

Esercizio 1. (4 punti)
Siano $U, W \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi definiti da

$$U = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}, \quad W = \{(x,y,z) \mid x-y=0,\ x-z=0\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare determinata dalle condizioni seguenti: F ammette U come autospazio associato all'autovalore 1 e W come autospazio associato all'autovalore -1. Determinare la matrice 3×3 associata ad F nella base canonica.

Esercizio 2. (5 punti)
Dire quali delle seguenti affermazioni è vera, giustificando la risposta:

(1) Sia $m \geq 2$. Il sottoinsieme V di $M_{m,m}(\mathbb{R})$ definito da

$$V = \{A \in M_{m,m}(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale.

(2) Il sottoinsieme W di $\mathbb{R}^n$ definito da

$$W = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$$

è un sottospazio vettoriale.

(3) Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \mathcal{V}_O$. Il sottoinsieme U di $\mathcal{V}_O$ definito da

$$U = \{\underline{v} \in \mathcal{V}_O \mid \langle \underline{v}, \underline{w}_1 \rangle = 0 = \langle \underline{v}, \underline{w}_2 \rangle\}$$

è un sottospazio vettoriale.

(4) Sia $m < n$. Un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non può essere iniettiva.

(5) Sia $m > n$. Un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è necessariamente iniettiva.

Esercizio 3. (4 punti)
Sia $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

e sia $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da A. Determinare una base di $\mathrm{Im}(F_A)$ e una base di $\mathrm{Ker}(F_A)$.

Esercizio 4. (5 punti)
Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(1) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, e in caso affermativo determinare una matrice invertibile $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e una matrice diagonale $\Delta \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che

$$C^{-1}AC = \Delta.$$

(2) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, e in caso affermativo determinare una matrice invertibile $C \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ e una matrice diagonale $\Delta \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tali che

$$C^{-1}AC = \Delta.$$

Esercizio 5. (4 punti)
Siano $A_1, A_2, A_3, A_4 \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ le matrici date da

$$A_1 = \left| \begin{array}{cc} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{array} \right|, \quad A_2 = \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right|,$$

$$A_3 = \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{array} \right|, \quad A_4 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 9 \end{array} \right|.$$

Determinare quali coppie sono coniugate su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6. (4 punti)
Nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ fissiamo un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $r \subset \mathcal{A}^3$ la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per r e parallelo alla retta r' di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 7. (4 punti)
Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $r \subset \mathcal{E}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

e $P \in \mathcal{E}^3$ il punto di coordinate $(0, 1, 0)$. Determinare le coordinate dei punti $Q \in r$ la cui distanza da P sia uguale a $\sqrt{5}$.