Geometria

Prof P. Piazza

Secondo esame scritto.

13 Febbraio 2013

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	5	
3	6	
4	7	
5	8	
Totale	32	

ATTENZIONE : GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI !

Esercizio 1. Spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con riferimento cartesiano ortonormale $RC(O\underline{i}\underline{j}\underline{k})$ e coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane e parametriche per la retta r passante per il punto P di coordinate $(1, 0, 0)$, incidente ed ortogonale alla retta s di equazioni cartesiane $x = z = y$.

Soluzione: Sia p_1 il piano per s e per P e sia p_2 il piano per P ortogonale a s. La retta cercata può ottenersi come intersezione dei piani: $r = p_1 \cap p_2$. Determiniamo p_1: il piano generico per s ha equazione cartesiana $\lambda(x - z) + \mu(y - z) = 0$. Imponendo il passaggio per $(1, 0, 0)$ otteniamo $\lambda = 0\,; \mu = 1$ (a meno di un fattore di proporzionalità non nullo) e quindi il piano $y - z = 0$. Il piano per P ortogonale ad s è $(x - 1) + y + z = 0$ (perché questo è un piano per P ed è ortogonale alla direzione $(1, 1, 1)$ che è la direzione di s). Mettendo a sistema i due piani si ottengono le equazioni cartesiane della retta. Poi, con noto procedimento, si passa alle equazioni parametriche.
Un altro modo di risolvere questo esercizio era il seguente:
i punti Q_t di s sono descritti dalle coordinate (t, t, t) al variare di $t \in \mathbb{R}$. Consideriamo la retta r_t per P e per Q_t e siano (ℓ_t, m_t, n_t) i suoi parametri direttori. La retta cercata, r, si ottiene imponendo che il prodotto scalare fra (ℓ_t, m_t, n_t) e $(1, 1, 1)$ sia uguale a zero; viene un'equazione in t di primo grado che ha un'unica soluzione t_0. La retta cercata è r_{t_0}.

Esercizio 2. Spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^5, < , >)$ con prodotto scalare canonico $< , >$ e base canonica fissata. Sia $L_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'operatore lineare definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 & \pi & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & -1 & \pi^2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare la dimensione dell'immagine di F_A.
(2) Stabilire se L_A è diagonalizzabile.
(3) Stabilire se L_A è un'isometria in $(\mathbb{R}^5, < , >)$.
(4) Stabilire se L_A è un operatore simmetrico in $(\mathbb{R}^5, < , >)$.

Soluzione: $\det A \neq 0$ implica che le colonne di A sono linearmente indipendenti. Dato che queste generano $\mathrm{Im} L_A$, si ha subito che $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^5$.
L_A è diagonalizzabile perché ha 5 autovalori distinti.
L_A non è simmetrico perché la matrice associata ad L_A nella base canonica, che è ortonormale, non è simmetrica (questa matrice è proprio A). Infine, L_A non è un'isometria. Se lo fosse, la sua matrice rispetto ad una qualsiasi base ortonormale, ad esempio la base canonica, dovrebbe essere ortogonale; d'altra parte si verifica immediatamente che A, che è appunto la matrice associata ad L_A nella base canonica, *non* è ortogonale.

Esercizio 3. Siano $U, W \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi definiti da

$$U = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = 0\}, \quad W = \{(x, y, z) \,|\, x - y = 0,\ x - z = 0\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare determinata dalle condizioni seguenti:

$$F\underline{u} = \underline{u} \quad \forall \underline{u} \in U \quad \text{e} \quad F\underline{w} = -\underline{w} \quad \forall \underline{w} \in W.$$

(1) Spiegare perché F è univocamente determinata da queste condizioni.
(2) Determinare la matrice A associata ad F nella base canonica.

Soluzione: Il sottospazio U ha dimensione 2; il sottospazio W ha dimensione 1. Una base per U è data da

$$\underline{v}_1 = (1, -1, 0)\,, \quad \underline{v}_2 = (1, 0, -1)\,;$$

una base per W è data da $\underline{v}_3 = (1,1,1)$. È immediato constatare che $U \cap W$ è il vettore nullo e che, quindi, $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ e i vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Il testo dell'esercizio ci dà la seguente informazione

$$F\underline{v}_1 = \underline{v}_1 \, , \quad F(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 \, , \quad F(\underline{v}_3) = -\underline{v}_3 \, ;$$

in particolare F è univocamente determinata da queste informazioni perché sappiamo che un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume su una base dello spazio di partenza. Sempre dalla definizione di F sappiamo che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per F e la matrice associata ad F in questa base di autovettori è la matrice diagonale

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Determiniamo la matrice A di cui nel testo dell'esercizio. Possiamo procedere in due modi:
(1) Esprimiamo i vettori della base canonica in funzione della base di autovettori e sfruttiamo la linerità di F per determinare le coordinate, rispetto alla base canonica, di $F(1,0,0), F(0,1,0), F(0,0,1)$. Quindi

$$F(1,0,0) = F(\frac{1}{3}(1,-1,0) + \frac{1}{3}(1,0,-1) + \frac{1}{3}(1,1,1)) =$$

$$\frac{1}{3}F(1,-1,0) + \frac{1}{3}F(1,0,-1) + \frac{1}{3}F(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,-1,0) + \frac{1}{3}(1,0,-1) - \frac{1}{3}(1,1,1)$$

da cui

$$F(1,0,0) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) \, ;$$

questa è la prima colonna della matrice cercata. Procedendo analogamente con le altre due colonne si trova

$$A = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} .$$

(2) Un secondo metodo per concludere l'esercizio fa uso della formula che lega le matrici associate ad uno stesso endomorfismo in basi diverse. La situazione qui è la seguente:

$$A \quad \text{associata a} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \quad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{associata a} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$$

La ben nota formula ci dice che $\Delta = C^{-1}AC$, con $\begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \end{vmatrix} C$ cioè

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Ne segue che $A = C\Delta C^{-1}$. Calcolando l'inversa di C e svolgendo il prodotto otteniamo nuovamente la matrice A.

Esercizio 4. Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate associate (x,y,z). Sia $r \subset \mathcal{E}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

e $P \in \mathcal{E}^3$ il punto di coordinate $(0,1,0)$.
(1) Determinare le coordinate dei punti $Q \in r$ la cui distanza da P sia uguale a $\sqrt{5}$.
(2) Determinare l'equazione cartesiana del piano σ passante per il punto R di coordinate $(0,0,1)$ ed ortogonale alla retta r.

Soluzione:
(1) Passando ad equazioni parametriche per r si ottengono i suoi punti nella forma

$$P(t) = (-t+1, \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}, t),$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Cerchiamo fra questi i punti che hanno distanza $\sqrt{5}$ da $Q = (0,1,0)$. Basta imporre che $d(P(t), Q)^2 = 5$; se ne ricava l'equazione di secondo grado in t

$$11t^2 - 17t - 10 = 0$$

che ha soluzioni $t_1 = 2$ e $t_2 = -5/11$. Risostituendo si ottengono i due punti cercati

$$(-1, 1, 2), \quad (16/11, -7/11, -5/11).$$

(2) La retta r ha parametri direttori $(-1, 2/3, 1)$; il fascio improprio di piani ortogonali a questa direzione è dato da

$$-x + \frac{2}{3}y + z + d = 0$$

Imponendo il passaggio per R si determina d.

Esercizio 5. Spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^3, <\,,\,>)$ con prodotto scalare canonico $<\,,\,>$, con base canonica fissata e coordinate associate (x_1, x_2, x_3).
Sia q la forma quadratica definita da

$$q(\underline{x}) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 10x_1x_3.$$

- Scrivere la forma bilineare simmetrica $b(\underline{x}, \underline{y})$ polare di q.
- Determinare la matrice $A_b^{\text{can.}}$ associata a $b(\,,\,)$ nella base canonica.
- Dare la definizione di nucleo di una forma bilineare simmetrica e determinarlo per il caso specifico di questo esercizio.
- Determinare una base ortogonale $\mathcal{F}$ di $(\mathbb{R}^3, <\,,\,>)$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.
- Determinare l'equazione cartesiana di un sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ che abbia dimensione 2 e tale che la restrizione di b ad U sia definita negativa.

Soluzione: La forma bilineare polare di $q(\underline{x})$ è

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - 5x_1y_3 - 5x_3y_1\,.$$

Vedere a tale proposito gli appunti sulle forme bilineari simmetriche a cura del docente, pagina 6. La matrice associata a b nella base canonica è la matrice simmetrica

$$A_b^{\text{can}} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Il nucleo della forma bilineare è uguale al nucleo di questa matrice (Lemma 11.16 libro di testo); dato che il determinante di questa matrice è non nullo, ne segue che il nucleo è banale. Definiamo un operatore simmetrico da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ ponendo $T := L_A$, con $A = A_b^{\text{can}}$. Un semplice conto mostra che A, e quindi T, ha polinomio caratteristico uguale a $-(2+\lambda)^2(\lambda - 8)$. T ha quindi autovalori $\lambda_1 = 8$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = -2$ con molteplicità algebrica 2. Una base ortonormale di autovettori $\mathcal{W}$ per T è data da

$$\underline{w}_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Si ha

$$A_b^{\mathcal{W}} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

La base cercata è la base $\mathcal{F}$ data da

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{8}}\underline{w}_1\,, \quad \underline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{w}_2\,, \quad \underline{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{w}_3$$

e si ha, ovviamente,

$$A_b^{\mathcal{F}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Il sottospazio U generato da $\underline{f}_2$ e $\underline{f}_3$ (che è poi l'autospazio associato all'autovalore -2) è un sottospazio di dimensione 2 per il quale la restrizione di b è definita negativa; infatti per ogni $\underline{u} \in U$ si ha $\underline{u} = \alpha\underline{f}_2 + \beta\underline{f}_3$ e quindi

$$b(\underline{u}, \underline{u}) = b(\alpha\underline{f}_2 + \beta\underline{f}_3, \alpha\underline{f}_2 + \beta\underline{f}_3) = -\alpha^2 - \beta^2$$

che è sempre minore di zero se $\underline{u}$ è non nullo. Da una base di U possiamo scrivere le equazioni cartesiane di U (ad ogni modo l'equazione di U l'avevamo già determinata quando abbiamo determinato una base dell'autospazio V_{-2}).