Geometria 1. Anno Accademico 99-00. Gruppo A-L
Esame del 11/7/00
Orali: il 18/7 alle ore 15 in Aula C ed il 19/7 alle ore 14 in Aula C.

Esercizio 1. Spazio euclideo E^3. Riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2\,\underline{e}_3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

ed ortogonale al piano σ di equazione cartesiana $2x + y - 3z + 15 = 0$.

Esercizio 2. Spazio affine A^4. Riferimento canonico con coordinate associate (X^1, X^2, X^3, X^4). Determinare equazioni cartesiane per la retta affine r passante per il punto $P(1, 1, 0, 2)$ e di direzione $\mathbb{R}(-1, 3, 0, 2)$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^7, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$, base canonica $\underline{e}$ di $\mathbb{R}^7$ fissata e coordinate associate $(x^1, \ldots, x^7)$. Sia W il sottospazio di equazione cartesiana $\sqrt{2}x^1 - 3x^3 + 5x^7 = 0$. Determinare una base ortonormale per $W^\perp$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\,\underline{e}_3\}$ fissata. Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4.1) Determinare equazioni cartesiane per il nucleo e per l'immagine di F_A.
(4.2) Determinare una base *ortonormale* per il nucleo di F_A. Determinare un vettore $\underline{h}$ nell'immagine di F_A che abbia lunghezza 3.
(4.3) Dire se l'operatore F_A è suriettivo. Dire se è unitario. Dire se è simmetrico.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $F_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dire se l'operatore F_A è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2). Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore che ammette la retta di equazione cartesiana $x^1 - 2x^2 = 0$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -1$ e la retta di equazione cartesiana $x^1 + x^2 = 0$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$.
(6.1) Spiegare perché F è univocamente determinato dalle condizione date.
(6.2) Determinare la matrice associata ad F nella base canonica $\underline{e}$.

(6.3) Dire se la matrice di cui in (6.2) è una *matrice diagonalizzabile.*

Esercizio 7. Piano euclideo E^2. Riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2$ con coordinate associate (x, y). È data la conica $\mathcal{C}$ di equazioni cartesiane

$$2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 1 = 0\,.$$

(7.1) Determinare la forma canonica euclidea della conica verificando così che $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
(7.2) Determinare le coordinate dei fuochi.

Esercizio 8. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita dal polinomio omogeneo di secondo grado

$$2X^1X^2 + (X^3)^2 - (X^4)^2\,.$$

(8.1) Determinare la forma bilineare $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ polare di q.
(8.2) Verificare che $b(\,,\,)$ è non-degenere.
(8.3) Si fissi in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare canonico. Dire se esiste una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^4$ che sia diagonalizzante per $b(\,,\,)$. In caso affermativo determinare una tale base.
(8.4) Determinare la segnatura di q.
(8.5) Determinare equazioni cartesiane per il b-ortogonale dell'iperpiano di equazione cartesiana $x^1 = 0$.