Algebra 1

Proff. P. Piazza, E. Spinelli

Primo Esame

1 Luglio 2016

Nome e Cogmome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (CALCOLATRICI, SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE SPENTI E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Determinare per quali valori di a e b il seguente sistema ha soluzioni (*non è richiesto di determinarle*)

$$\begin{cases} aX \equiv 8 \mod 14 \\ X \equiv 2b \mod 6 \end{cases}$$

Soluzione:

Risposta:

a è tale che $\boxed{}$ b è tale che $\boxed{}$

Esercizio 2. Sia G un gruppo e $H \leq G$. Provare che

(a) per ogni $g \in G$ l'insieme $H^g := \{g^{-1}hg \,|\, h \in H\}$ è un sottogruppo di G isomorfo a H;

(b) se G è finito e $H \trianglelefteq G$, H ciclico, allora per ogni K sottogruppo di H si ha che $K \trianglelefteq G$ (*utilizzare le proprietà dei sottogruppi di un gruppo ciclico finito*).

Soluzione:

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}_7 := \mathbb{Z}/\equiv_7$, $f := x^3 + ax^2 + 5x + 3 \in \mathbb{Z}_7[x]$ e $I := (f)_{\mathbb{Z}_7[x]}$.

(a) Determinare per quali valori di a l'anello $\mathbb{Z}_7[x]/I$ è un campo.

(b) Per $a = 5$ stabilire se $x + 2$ ha inverso in $\mathbb{Z}_7[x]/I$.

Soluzione:

Risposta: (a) $a = \boxed{}$ (b) $x + 2$ ha inverso? $\boxed{}$

Esercizio 4. Sia G un gruppo e si consideri l'insieme $G \times G$ munito del prodotto componente per componente (il prodotto diretto di G e G) che è un gruppo. Sia $D := \{(a, a) \mid a \in G\}$. Provare che

(a) $D \leq G$;

(b) $D \trianglelefteq G$ se, e solo se, G è abeliano;

(c) se $D \trianglelefteq G$ allora $G \times G/D$ è isomorfo a G.

Soluzione:

Esercizio 5. Si consideri l'ideale I di $\mathbb{Z}[i]$ generato dagli elementi $3+6i$ e $3+i$.

(a) Determinare se I è un ideale primo di $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Determinare $|\mathbb{Z}[i]/I|$.

Soluzione:

(a) I è primo $\boxed{}$ (c) $|\mathbb{Z}[i]/I| = \boxed{}$