Algebra 1

Proff. A. De Sole, P. Piazza e E. Spinelli

Primo Esonero

23 Aprile 2012

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6	
2	6	
3	6	
4	6	
5	6	
Totale	30	

Giustificate le risposte!

Esercizio 1. (a) Si determini se la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, data da $f(m,n) = 3^m 7^n$, è iniettiva e/o surettiva.

(b) Si determini la cardinalità dell'insieme $S = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = 3^m 7^n \text{ per qualche } m, n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione:

Risposta:

(a) *Cerchiare la risposta:* La funzione f è iniettiva? **SI** – **NO**. La funzione f è suriettiva? **SI** – **NO**

(b) Card(S)= $\boxed{}$

Esercizio 2. Dati due interi $a, b \in \mathbb{Z}$, si consideri il seguente sistema di equazioni alle congruenze:

$$\begin{cases} 2x + 4 \equiv 0 & \mathrm{Mod}(6)\,, \\ 3x \equiv a & \mathrm{Mod}(10)\,, \\ 5x \equiv b & \mathrm{Mod}(35)\,. \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri a e b in $\mathbb{Z}$ il sistema ammette almeno una soluzione $x \in \mathbb{Z}$.

Soluzione:

Risposta:

Il sistema ammette soluzioni per (a, b): $\boxed{}$

Esercizio 3. (a) Si determini per quali valori dell'intero $n \geq 1$ si ha un omomorfismo (ben definito) di anelli $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/n$ dato da $f(a+ib) = \overline{a+5b} \in \mathbb{Z}/n$.

(b) Se n è come nella parte (a), si verifichi che $J = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i] \text{ tale che } n \mid a + 5b\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$. Determinare inoltre per quali valori di n tale ideale è massimale.

Soluzione:

Risposta:

(a) f è un omomorfismo per $n =$ $\boxed{}$

(b) $J \subset \mathbb{Z}[i]$ è un ideale massimale per $n =$ $\boxed{}$

Esercizio 4. Determinare tutti (a meno di isomorfismo) i gruppi abeliano di ordine 120 con almeno un elemento di ordine 4.

Soluzione:

Risposta:

Lista dei gruppi abeliani di ordine 120 con almeno un elemento di ordine 4:

Esercizio 5. Sia A un anello commutativo con unità con la proprietà che, per ogni $x \in A$, esiste un intero $n > 1$ tale che $x^n = x$. Dimostare che un ideale $I \subset A$ è primo se e solo se è massimale.

Soluzione:

.

(pagina lasciata intenzionalmente bianca)

.

(pagina lasciata intenzionalmente bianca)