Geometria 1. Anno Accademico 99-00. Gruppo A-L
Esame del 9/6/00

Esercizio 1. Spazio euclideo E^3. Riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2\,\underline{e}_3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per il punto $P(2, 0, 1)$, incidente ed ortogonale alla retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Spazio euclideo E^3 come nell'esercizio 1. Si consideri nuovamente la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Determinare i punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall'origine.

Esercizio 3. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$, base canonica $\underline{e}$ di $\mathbb{R}^4$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4). Sia W il sottospazio di equazione cartesiana $x^1 - 3x^3 + 5x^4 = 0$. Determinare una base per W ed una base per $W^\perp$.

Esercizio 4. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\,\underline{e}_3\}$ fissata. Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4.1) Determinare equazioni cartesiane per il nucleo e per l'immagine di F_A.
(4.2) Determinarne una base *ortogonale* per l'immagine.
(4.3) Dire se l'operatore F_A è iniettivo. Dire se è unitario.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $F_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ l'operatore definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{\pi} \\ 0 & 1 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Dire se l'operatore F_A è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3). Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ l'operatore definito da

$$F(1,1,1) = (2,3,1) \quad F(0,1,1) = (0,0,-1) \quad F(0,0,1) = (4,6,3)\ .$$

(6.1) Determinare la matrice associata ad F nella base $\underline{e}$.
(6.2) Verificare che il piano di equazione cartesiana $3x^1 - 2x^2 = 0$ è invariante per F.
(6.3) Dire se la restrizione di F al piano $3x^1 - 2x^2 = 0$ è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$, base canonica $\underline{e}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3). Sia α il piano di equazione cartesiana $x^1 + x^3 = 0$. Determinare la matrice associata nella base canonica $\underline{e}$ all'operatore di proiezione ortogonale su α.

Esercizio 8. Spazio euclideo E^2 con riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2$ fissato e coordinate associate (x, y). È data la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$5x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2 = 0.$$

(8.1) Determinare la forma canonica euclidea della conica verificando così che $\mathcal{C}$ è un'ellisse *reale*.
(8.3) Determinare l'equazione cartesiana della retta contenente il semiasse maggiore.