Geometria 1. Anno Accademico 99-00. Gruppo A-L
Esame del 7/2/00

Esercizio 1. Spazio euclideo E^3. Riferimento cartesiano canonico $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2\,\underline{e}_3$ con coordinate associate (x, y, z). Determinare equazioni cartesiane per la retta r passante per il punto $P(1, 0, 0)$, incidente ed ortogonale alla retta s di equazioni cartesiane $x = z = y$.

Esercizio 2. Sia E un piano euclideo su un piano vettoriale euclideo $(V, <, >)$. Sia $O\underline{e}_1\,\underline{e}_2$ un riferimento cartesiano in E con coordinate associate (x^1, x^2). Sia r la retta di equazione cartesiana $3x^1 + 6x^2 + 5 = 0$.
Sia O' il punto di coordinate $(-4, 1)$ e siano

$$\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_2\,, \qquad \underline{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{e}_2$$

vettori di V.
(2.1) Verificare che $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano di E. Siano (y^1, y^2) le coordinate associate a tale riferimento.
(2.2) Determinare le formule di cambiamento di coordinate, dalle (x^1, x^2) alle (y^1, y^2) e viceversa.
(2.3) Determinare l'equazione cartesiana della retta r nel riferimento $O'\underline{f}_1\,\underline{f}_2$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^2, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

(3.1) Verificare che F_A è una proiezione su una retta r parallelamente ad una retta s.
(3.2) Determinare le equazioni cartesiane delle 2 rette.
(3.3) Dire se F_A è un operatore di proiezione ortogonale.

Esercizio 4. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Sia $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore che ammette la retta $\mathbb{R}(1, 1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_1 = -2$ e la retta $\mathbb{R}(-1, 0)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda_2 = 3$.
(4.1) Spiegare perché l'operatore F è univocamente determinato dalle condizioni date.
(4.2) Determinare la matrice associata ad F nella base $\underline{e}$.

Esercizio 5. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ fissata. Siano F_A ed F_B gli operatori in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ definiti rispettivamente dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5.1) Determinare la matrice associata all'operatore $F_A \circ F_B$ nella base $\underline{e}$.

(5.2) Dire se $F_A \circ F_B$ è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Piano euclideo E^2 con riferimento cartesiano canonico fissato e coordinate associate (x, y). Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 4x + 1 = 0\,.$$

(6.1) Determinare la matrice associata alla conica.
(6.2) Determinare il tipo di conica.

Esercizio 7. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^5, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e}$ fissata. Sia $F_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ l'operatore definito dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 & \pi & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} & -1 & \pi^2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 2 & e \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

(7.1) Determinare la dimensione dell'immagine di F_A.
(7.2) Dire se F_A è diagonalizzabile.
(7.4) Dire se F_A è un operatore unitario.

Esercizio 8. Spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ con prodotto scalare canonico $\bullet$ e base canonica $\underline{e}$ fissata.
(8.1) Sia W il sottospazio di equazioni cartesiane $x^1 + x^4 = 0$. Determinare una base per $W^\perp$.
(8.2) Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore S di simmetria ortogonale rispetto a W.
(8.3) Sia U il piano generato da $\underline{u}_1 = (3, 0, 0, 1)$ $\underline{u}_2 = (0, 0, 0, -1)$. Determinare equazioni cartesiane per U e per $U^\perp$.
Facoltativo.
(8.4) Verificare che U è un piano invariante rispetto a S. Determinare il polinomio caratteristico di $S|_U$.
(8.5) Sia $b : U \times U \to \mathbb{R}$ la forma bilineare

$$b(\underline{u}, \underline{u}') = S|_U(\underline{u}) \bullet \underline{u}'\,.$$

Verificare che b è simmetrica e determinarne la segnatura.