Algebra Lineare. a.a. 2003/03. Prof. P. Piazza
Esame del 3/2/2003

Esercizio 1. (5 punti)
Siano $U, V \subset \mathbb{R}^3$ i sottospazi dati da

$$U = \text{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ -4 \\ 3 \end{array}\right| , \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ -3 \end{array}\right| , \left|\begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ -1 \end{array}\right| \right), \quad V = \text{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 8 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right| , \left|\begin{array}{c} 7 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right| \right).$$

Determinare una base di $U \cap V$.

Esercizio 2. (5 punti)
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,1) = (1,2,0)\,, \quad F(0,1,1) = (1,3,-1)\,, \quad F(0,1,-1) = (1,1,-1)$$

Determinare la matrice associata ad F nella base canonica.

Esercizio 3. (4 punti)
Sia $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| .$$

Determinare autovalori ed autospazi di F_A. Decidere se F_A è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinare una base di autovettori.

Esercizio 4. (4 punti)
Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ ed una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Consideriamo il sottospazio $W \subset \mathcal{V}_O$ di equazione cartesiana

$$x - y + z = 0\,.$$

Determinare una base *ortogonale* $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ di $\mathcal{V}_O$ con

$$\underline{f}_1 \in W\,, \quad \underline{f}_2 \in W\,, \quad \|\underline{f}_3\|^2 = 12\,.$$

Esercizio 5. (5 punti)
Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ ed una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $\underline{u}$ il vettore di coordinate

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Sia $T : \mathcal{V}_O \to \mathcal{V}_O$ l'applicazione definita da

$$T(\underline{v}) = \underline{v} - < \underline{v}, \underline{u} > \underline{u}\,.$$

5.1 Spiegare perché T è *lineare.*
5.2 Determinare la matrice associata a T nella base $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.
5.3 Determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine.

Esercizio 6. (4 punti)
Nello spazio affine $\mathcal{A}^3$ fissiamo un riferimento affine $RA(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ con coordinate associate (x, y, z). Siano $r, s \subset \mathcal{A}^3$ le rette di equazioni rispettivamente

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

Determinare le equazioni del piano per $P_0 = (1, 1, 1)$, parallelo ad r ed s.

Esercizio 7. (5 punti)

Sia $RC(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ con coordinate associate (x, y, z). Sia $r \subset \mathcal{E}^3$ la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

e $P_0 \in \mathcal{E}^3$ il punto di coordinate $(0, 1, 0)$. Determinare equazioni cartesiane per la retta passante per P_0, incidente ed ortogonale alla retta r.