Geometria
Appello II — Sessione Estiva
Corso di laurea in Fisica — a.a. 2020/2021
Tutti i Canali

Durata: 1 ore e 30 minuti

Paolo Bravi, Simone Diverio, Paolo Piazza,
Paolo Piccinni, Riccardo Salvati Manni, Ernesto Spinelli

12 luglio 2021

Esercizio 1. Determinare l'espressione in coordinate canoniche (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ dell'unica applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Determinare una base per l'immagine di T. Spiegare perché l'applicazione T è unica.

Esercizio 2. Si consideri l'operatore lineare $L_A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & i & 1\\0 & 2 & 0\\-1 & i & 1\end{pmatrix}.$$

Determinare lo spettro di L_A e, se esiste, una base di $\mathbb{C}^3$ composta da autovettori di L_A.

Esercizio 3. Sia $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica data da

$$b(v, w) = \operatorname{tr}\big(v \cdot w^t\big).$$

Determinare la segnatura di b, e una base b-ortonormale $\mathcal{B}$ per il complemento ortogonale $U^{\perp_b}$ rispetto a b del sottospazio

$$U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

Completare infine $\mathcal{B}$ a una base b-ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. I vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ forniscono una base di $\mathbb{R}^3$, come è immediato verificare calcolando ad esempio

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0.$$

Sia essa $\mathcal{B}$. Allora, per definizione, la matrice associata a T con base $\mathcal{B}$ in partenza e canonica in arrivo è

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La matrice del cambio di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ a quella canonica è data da

$$C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dunque la matrice associata a T nella base canonica sia in partenza che in arrivo sarà data da

$$A = B \cdot C^{-1}$$

Trovo C^{-1} con una E.G.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Infine

$$A = B \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Quindi l'espressione di T in coordinate è

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y - 2z \\ -x + 3y - z \\ -x + 3y - 2z \end{pmatrix}$$

Un sistema di generatori per l'immagine è dato da $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Il primo è multiplo del secondo, mentre primo e ultimo formano un insieme linearmente indipendente.

Quindi una base per $\mathrm{Im}(T)$ è data ad esempio da $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

L'operatore T è unico per un teorema generale che afferma che data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale V, e n vettori arbitrari $\{w_1, \dots, w_n\}$ di uno sp. vett. W $\exists !$ operatore lineare $T : V \to W$ t.c. $\forall i = 1, \dots, n$ si ha $T(v_i) = w_i$.

Ma come osservato, i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forniscono una base di $\mathbb{R}^3$.

<u>Esercizio 2</u>. Calcolo il polinomio caratteristico di L_A:

$$P_{L_A}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & i & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2+1\right]$$

Quindi: $p_{L_A}(\lambda) = 0$ sse $\lambda = 2$ oppure $(1-\lambda)^2+1=0$, cioè $1-\lambda = \pm i \iff \lambda = 1 \pm i$

Lo spettro di L_A è dato da $\{1+i, 1-i, 2\}$.

L_A ha 3 autovalori distinti $\Rightarrow$ L_A è diagonalizzabile.

Trovo ora una base di autovettori.

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & -1 \end{pmatrix} \overset{E.G.}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ autovettore di autovalore $\lambda = 2$

$\lambda = 1 \pm i$

$$\begin{pmatrix} \mp i & i & 1 \\ 0 & 1\mp i & 0 \\ -1 & i & \mp i \end{pmatrix} \overset{E.G.}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & i & \mp i \\ 0 & 1\mp i & 0 \\ 0 & i\pm 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & i & \mp i \\ 0 & 1\mp i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mp i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{autovettore di autovalore } 1 \pm i$$

$\Rightarrow$ base di $\mathbb{C}^3$ composta da autovettori di L_A

è data ad esempio da $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

<u>Esercizio 3</u> Dato $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

si ha che

$$v \cdot w^t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & a\gamma \\ b\alpha & b\beta & b\gamma \\ c\alpha & c\beta & c\gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tr}(v \cdot w^t) = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

$\Rightarrow$ b non è altri che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$. La sua segnatura è dunque $(3,0,0)$.

Una base per il complemento ortogonale di

U è dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Per averla ortonormale va quindi solo normalizzata $\rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Per completarla a una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$, è sufficiente trovare una base ortogonale di U e giustapporla a $\mathcal{B}$, essendo U ortogonale a $U^\perp$.

Una base di U si ottiene risolvendo

$$\{x - y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ora va ortogonalizzata, usando ad esempio Gram-Schmidt. Rimpiazzo $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{+1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ di U è ortogonale.

La base cercata è ad esempio quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$