Geometria
Appello I — Sessione Estiva
Corso di laurea in Fisica — a.a. 2020/2021
Tutti i Canali

Durata: 1 ore e 30 minuti

Paolo Bravi, Simone Diverio, Paolo Piazza,
Paolo Piccinni, Ernesto Spinelli

22 giugno 2021

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[t]$ dei polinomi $p(t) = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$ di grado minore o uguale a 3, a coefficienti reali. Siano U e W i seguenti sottospazi vettoriali.

$$U = \mathrm{Span}\{t^3 + 2t^2 - 2t,\ t^2 - t + 1\},$$
$$W = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid p(-1) = p'(-1) = 0\}.$$

(i) Determinare una base dell'intersezione $U \cap W$.

(ii) Determinare equazioni cartesiane (nelle coordinate a_0, a_1, a_2, a_3) per la somma $U + W$.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico e coordinate (x, y, z). Sia U il sottospazio di equazione $x + y - 2z = 0$.

(i) Determinare una base del complemento ortogonale $U^\perp$.

(ii) Scrivere l'espressione in coordinate della proiezione ortogonale su U, $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

(iii) e della proiezione ortogonale su $U^\perp$, $p_{U^\perp} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia A la matrice seguente

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

i) Mostrare che A è una matrice ortogonale.

ii) Determinare una base *unitaria* di $\mathbb{C}^2$ formata da autovettori di A.

SOLUZIONI

1) $U = \text{Span}\{t^3+2t^2-2t,\ t^2-t+1\}$ ← è anche base

$W = \{p \mid p(-1) = p'(-1) = 0\}$

Una base per W è data da $\{(t+1)^2,\ t(t+1)^2\}$

⇒ Un sistema di generatori per $U+W$ è dato da $U+W = \text{Span}\{t^3+2t^2-2t,\ t^2-t+1,\ t^2+2t+1,\ t^3+2t^2+t\}$

Procedo con un'unica eliminazione di Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a_0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & a_1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array}\right)$$

(giallo) = base di U

(arancione) = base di W

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_1-2a_0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & a_2+2a_0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_1 - 2a_0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & a_1 + a_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_0 - a_1 + a_3 \end{array}\right)$$

Questo ci dice che (ii)

$$\boxed{\left\{ 2a_0 - a_1 + a_3 = 0 \right. \quad \text{è eq. cartesiana per } U+W}$$

Guardando solo alla parte , che corrisponde al sistema lineare omogeneo in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dato da

$$\alpha(t^3+2t^2-2t) + \beta(t^2-t+1) + \gamma(t+1)^2 + \delta t(t+1)^2 = 0,$$

deduciamo che per l'intersezione abbiamo che $p \in U \cap W$ sse

$$\begin{aligned} p &= \gamma (t+1)^2 - \gamma t (t+1)^2 \\ &= \gamma (t+1)^2 (1-t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ base per $U \cap W$ è data ad esempio da

$$\boxed{\left\{ (1-t)(t+1)^2 \right\}.} \quad \text{(i)}$$

2) Una base per $U^{\perp}$ è data ad esempio dal vettore $\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}$. Infatti $\dim U = 2$, prodotto
(i)
scalare non degenere $\Rightarrow \dim U^{\perp} = 1$. Ora,

se $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in U \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = x+y-2z = 0$

perché $v \in U$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ è ortogonale ad ogni vettore di U, è $\neq 0 \Rightarrow \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ ha dimensione 1 ed è $\subseteq U$.

$\Rightarrow U = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ e $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ ne è una base.

Una base per U è data ad esempio da

$\left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ come si vede subito risolvendo

$\{x+y-2z=0$. La rendo ora ortogonale

sostituendo $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ con

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$\leadsto \left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ è base ortogonale per U

$\Rightarrow$ la proiezione su U è data da

$$P_U \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$- \frac{\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{-x+y}{2} \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{x+y+z}{3} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x + 3(-x+y)\cdot(+1) - 2(x+y+z) \\ 6y - 3(-x+y) - 2(x+y+z) \\ 6z - 2(x+y+z) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6x - 3x + 3y - 2x - 2y - 2z \\ 6y + 3x - 3y - 2x - 2y - 2z \\ 6z - 2x - 2y - 2z \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} x + y - 2z \\ x + y - 2z \\ -2x - 2y + 4z \end{pmatrix}} \quad (ii)$$

In generale si ha $Id_{\mathbb{R}^3} = P_U + P_{U^\perp}$

$$\Rightarrow P_{U^\perp}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - P_U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x + y - 2z \\ x + y - 2z \\ -2x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5x - y + 2z \\ -x + 5y + 2z \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix}} \quad (iii)$$

3)

$$A = 2\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = 2\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = 4\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{A^t = A^{-1} \text{ e } A \text{ è ortogonale per definizione}}$

(i)

Calcolo il polinomio caratteristico di A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id_2)$$

$$= \lambda^2 - tr(A)\cdot\lambda + \det(A)$$

$$= \lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1$$

Radici di $p_A(\lambda)$:

$$\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$$

Autospazi. Risolvo sistema omogeneo associato a

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow 2 \begin{pmatrix} \mp i & -1 \\ 1 & \mp i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & -1 \end{pmatrix} \underset{II \pm i I}{\overset{E.G.}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathbb{C}^2\right)_{\frac{\sqrt{3} \pm i}{2}} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base ortogonale di $\mathbb{C}^2$ rispetto al prodotto hermitiano canonico, costituita da autovettori. Per ottenerne una unitaria è sufficiente dunque normalizzarle. Entrambi i vettori hanno lunghezza $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ la base cercata è data da

$$\boxed{\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} \quad (ii)$$